Les surfaces paramétriques

Ce cours est une **compilation** :

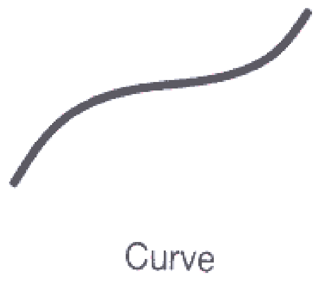
- Du cours de Modélisation géométrique (IRIT-UPS Toulouse; Equipe Vortex)
- Cours de Christian Jacquemin (LIMSI- Paris 11)
- Cours de Marc Daniel (LSIS- Marseille)
- Cours de E. Bechet (Université de Liège)
- Cours Antoine Brière-Côté (ETS, Canada)
- Cours G. Gesquière DUT Informatique- Arles
- Cours G. Gesquière Gamagora- Lyon

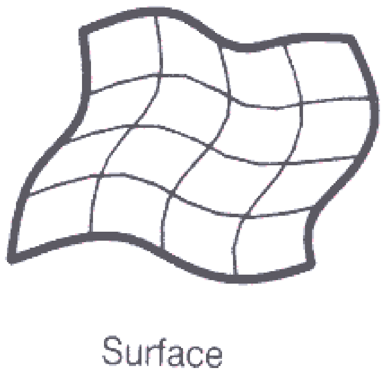
Plan

- Définition générale
- Produit tensoriel de deux courbes
  - Principe et définition
  - Tangentes, normales
  - Carreaux d'Hermite
  - Carreaux de Bézier
- Carreaux triangulaires de Bézier
- Patches de Coons

Représentation paramétrique

- Forme générale d'une surface paramétrée:
  - Pour une courbe, un seul paramètre est nécessaire :
    - x = x (u) y = y(u) z = z(u)

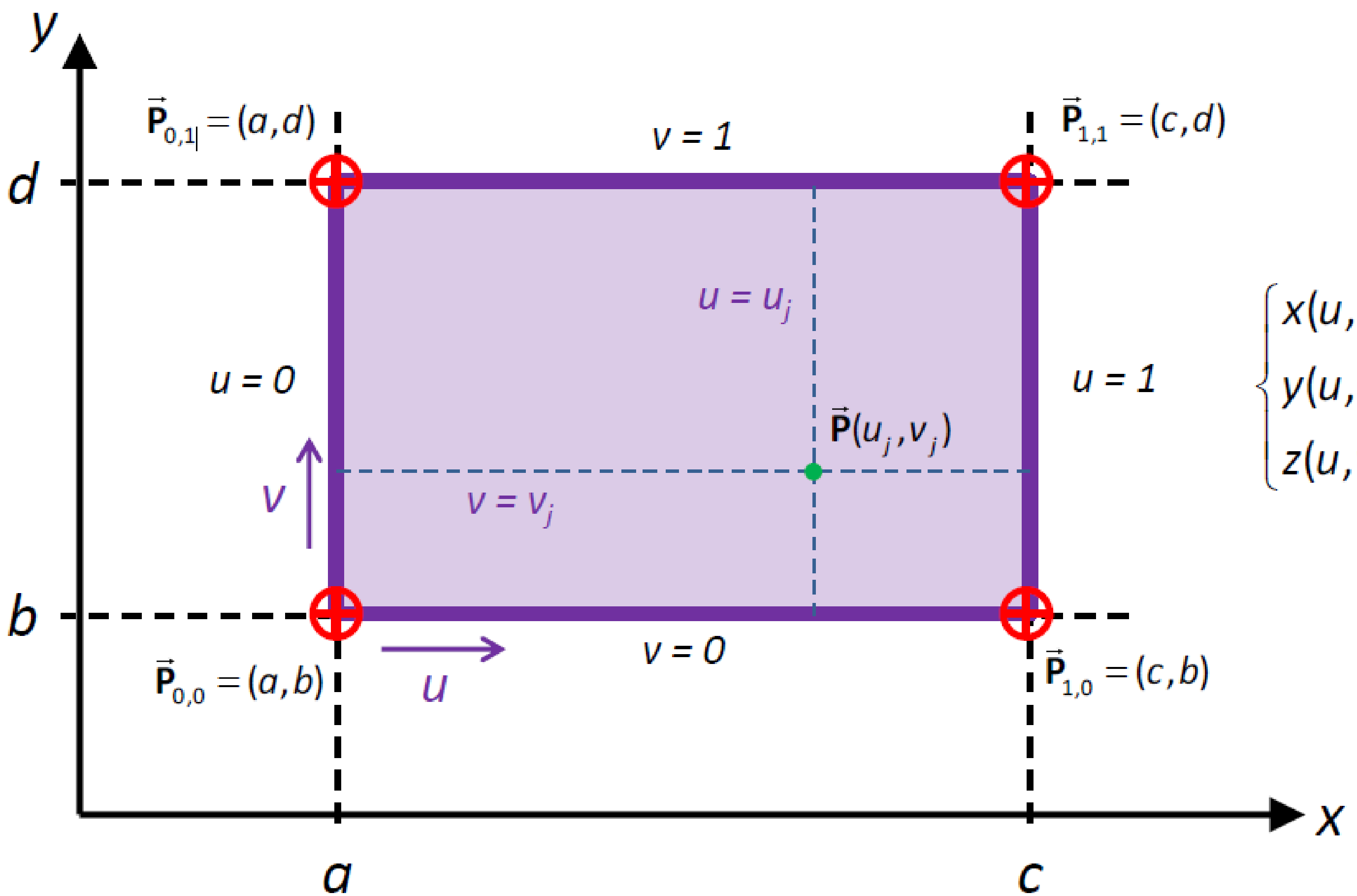




  - Pour une surface, deux paramètres sont nécessaires :
    - x = x (u,v) y = y(u,v) z = z(u,v)
- Caractéristiques générales
  - Les techniques de représentation sont des extensions des courbes paramétriques dans la seconde dimension v;
  - Les surfaces ainsi obtenues partagent beaucoup de caractéristiques avec les courbes correspondantes.

Représenation paramétrique

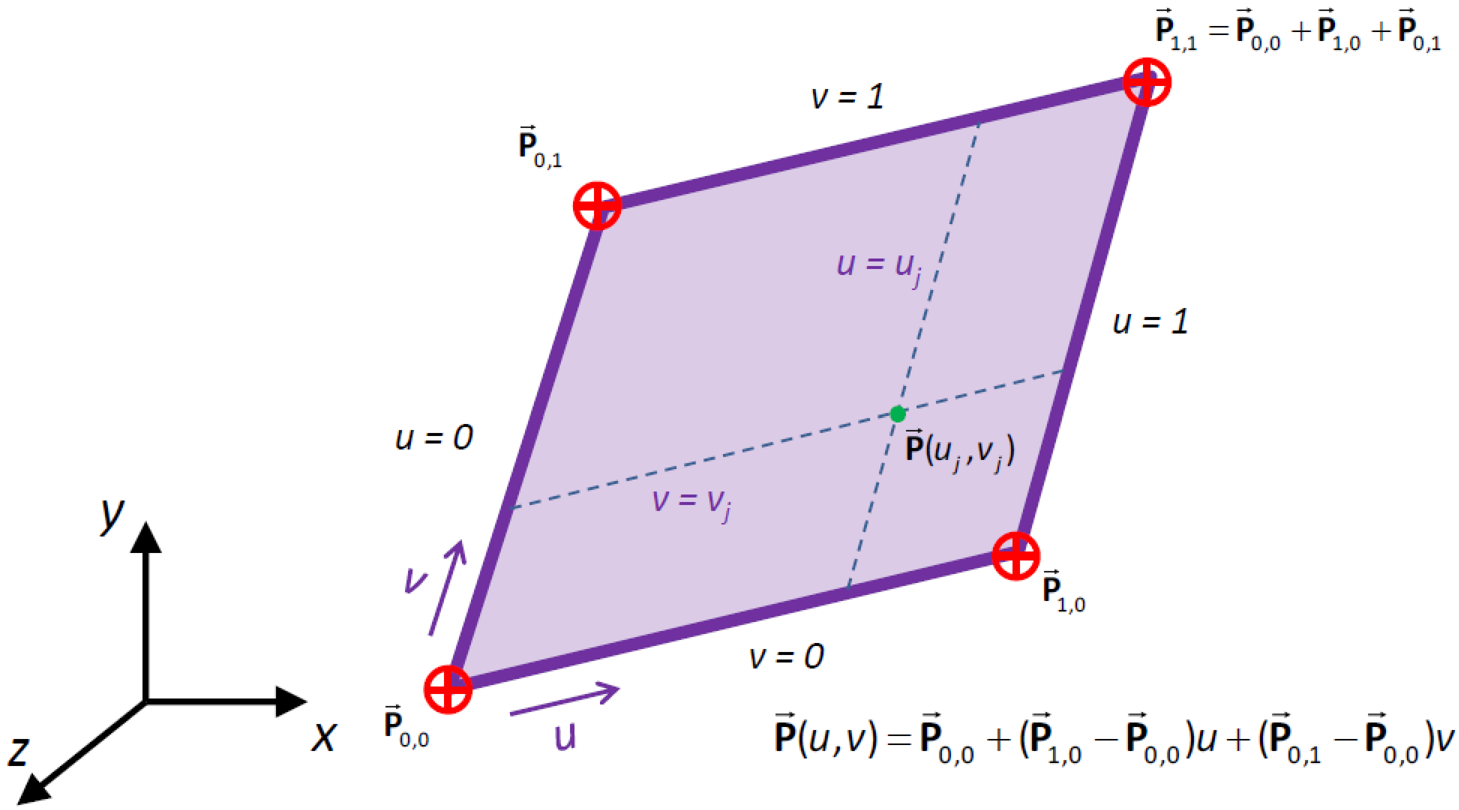
- Exemple simple: Carreau rectangulaire du plan XY…
  - Sommets $P_{0,0}(a, b)$, $P_{1,0}(c, b)$, $P_{1,1}(c, d)$, $P_{0,1}(a, d)$…



$$\begin{cases} x(u,v) = a + (c-a)u \\ y(u,v) = b + (d-b)v \\ z(u,v) = 0 \end{cases}$$

Représentation paramétrique

- Exemple: Carreau planaire dans l'espace 3D…
  - Sommets $P_{0,0}$, $P_{1,0}$, $P_{1,1}$, $P_{0,1}$

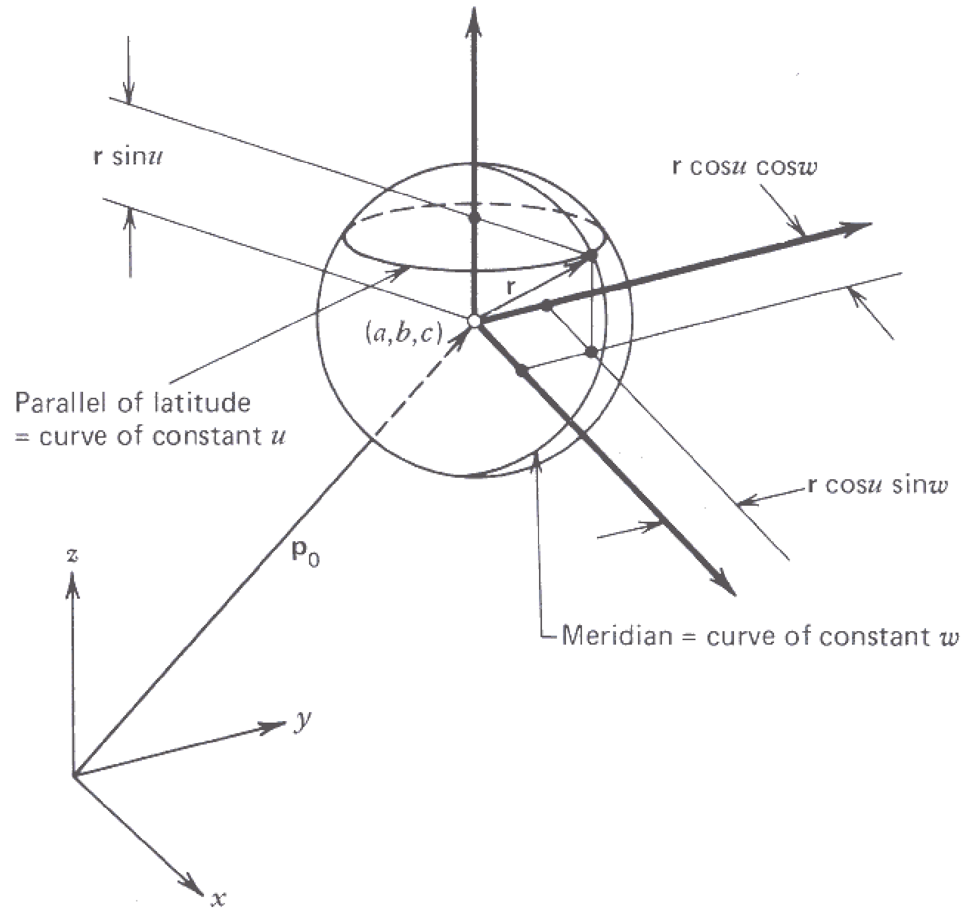


Représentation paramétrique

- Surface sphérique centrée en P0 = (x0, y0, z0):

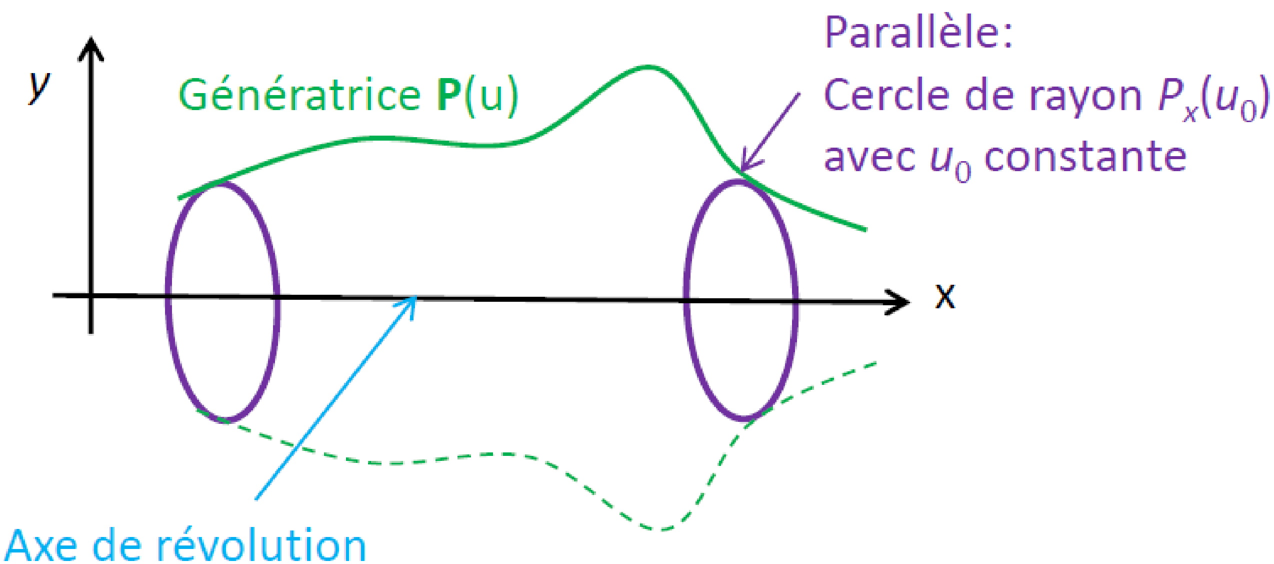
$$\vec{\mathbf{S}}(u,v)=\begin{cases} x(u,v)=x_0+r\cdot\cos(u)\cdot\cos(w)\\ y(u,v)=y_0+r\cdot\cos(u)\cdot\sin(w)\\ z(u,v)=z_0+r\cdot\sin(u)\end{cases}\quad ,u\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],w\in[0,2\pi]$$

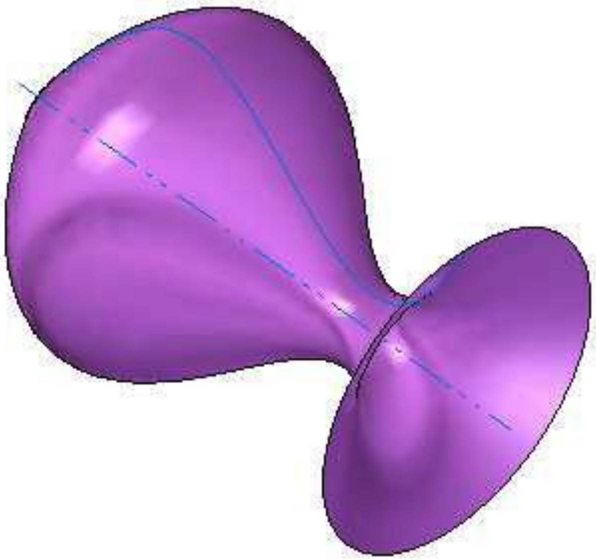
  - Parallèles (latitude): courbes iso-paramétriques à u constant;
  - Méridiens (longitude): courbes iso-paramétriques à w constant;



Surfaces balayées

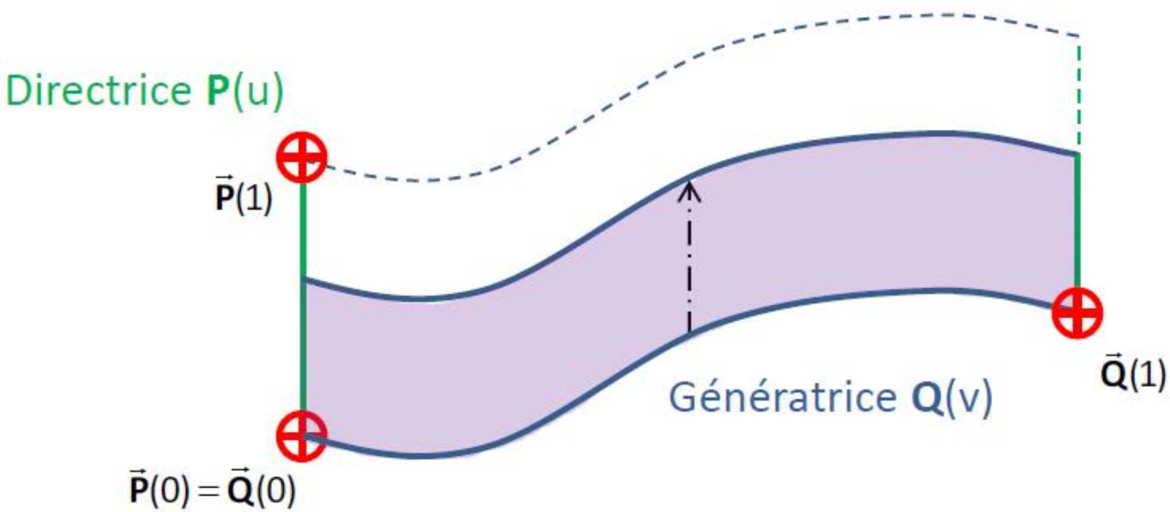
- Surface de révolution
  - Obtenue par révolution d'une courbe génératrice autour d'un axe de révolution;
  - Génératrice = courbe déplacée qui balaie la surface;
  - L'intersection d'un plan perpendiculaire à l'axe de révolution qui coupe la surface fournit un cercle nommé parallèle;

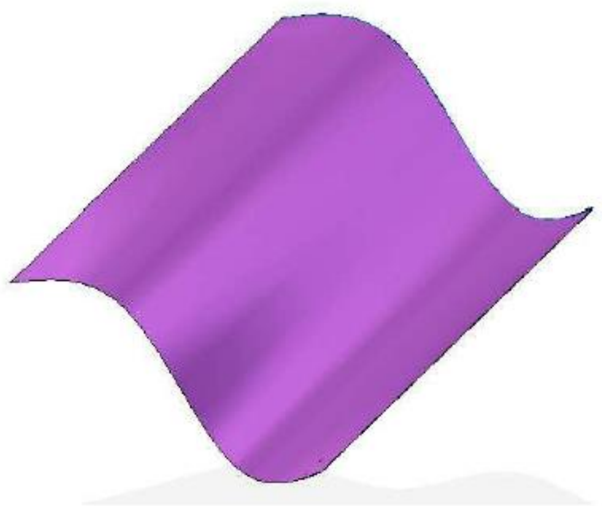




Surfaces balayées

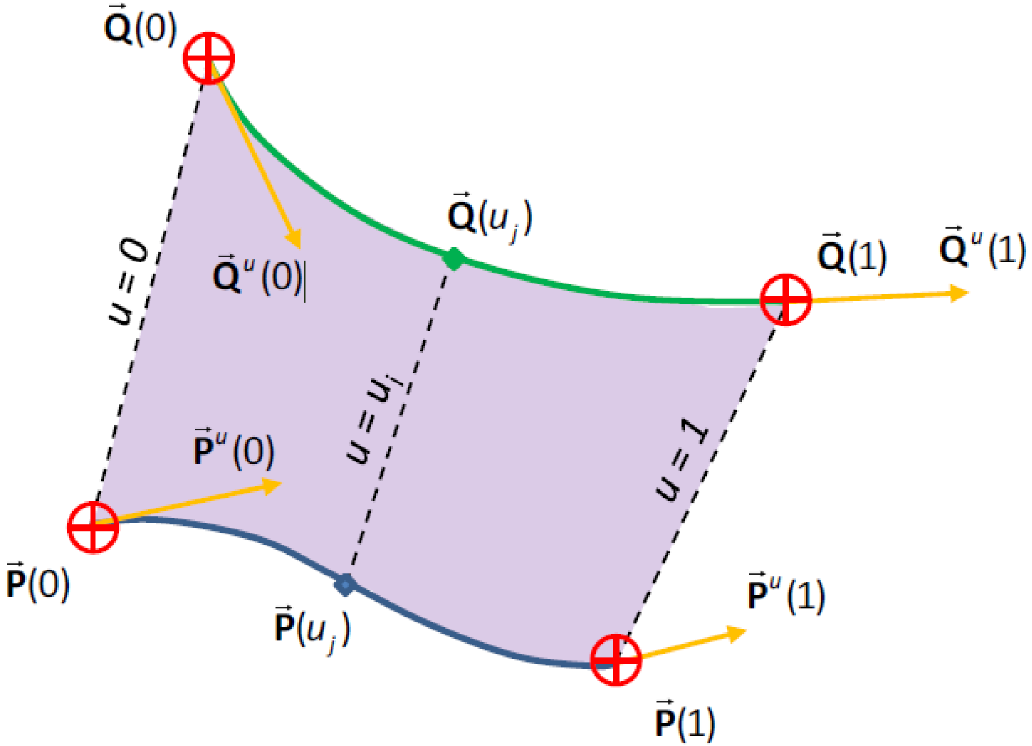
- Surface cylindrique
  - Créées par une droite directrice sur laquelle est translatée de manière parallèle une courbe génératrice.
    - Directrice = Guide ou trajectoire;
  - Si la génératrice est un cercle, on obtient un cylindre circulaire;
  - Extrusion = directrice droite (direction + distance) + profil générateur quelconque (esquisse);

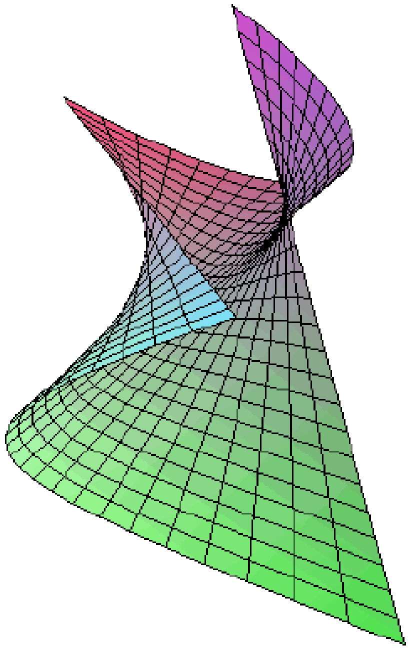




Surfaces balayées

- Surface réglée
  - Surface telle qu'en chaque point de la surface passe un segment de droite complètement contenu dans la surface;
  - Peut être obtenue par balayage d'un segment de droite (génératrice) qui se déplace entre deux courbes quelconques.

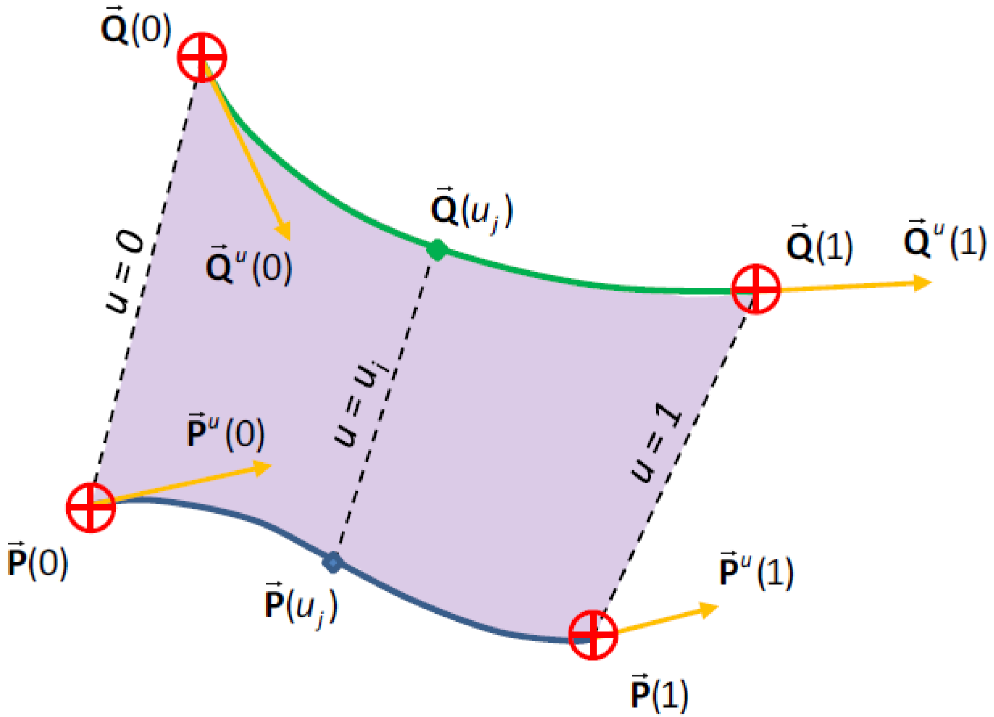




Surface balayée

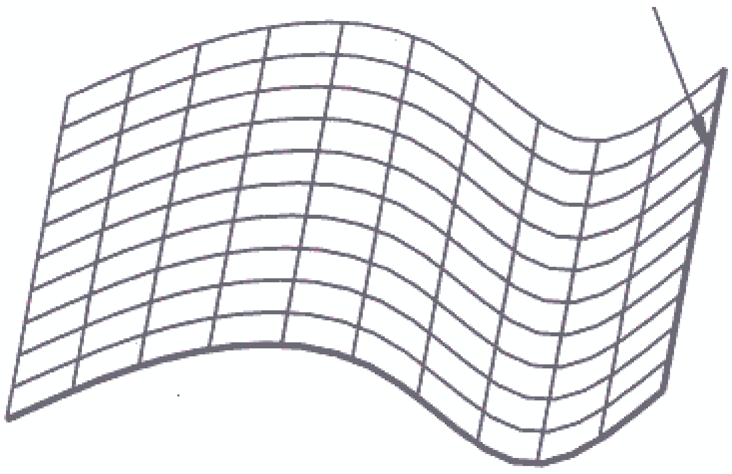
- Surface réglée (formulation mathématique):
  - Soit deux courbes P(u) et Q(u) définie dans l'espace 3D en fonction du même paramètre u variant de 0 a 1;
  - Si on a P(u) et Q(v), effectuer un changement de variable v = f(u);
  - Le principe revient à former un segment de droite entre tous les points évalués $P(u_i)$ et $Q(u_i)$:

$$S(u,v) = (1-v)P(u) + vQ(u)$$



Carreaux de surfaces

- Caractéristiques générales:
  - Élément de base dans la définition de surfaces complexes;
  - Équivalent aux segments pour la définition des courbes;
  - Un carreau est considéré bi-paramétrique puisqu'il est décrit par deux paramètres (u et v);
  - Pour un carreau, u et v varient habituellement de 0 à 1;
  - En fixant u ou v, on génère une courbe iso-paramétrique sur la surface définie en fonction du 2e paramètre;
  - Une surface est ainsi décrite par un réseau de courbes iso-paramétriques;
  - Ici, incrément de 0.1 en u et v.



Définition générale

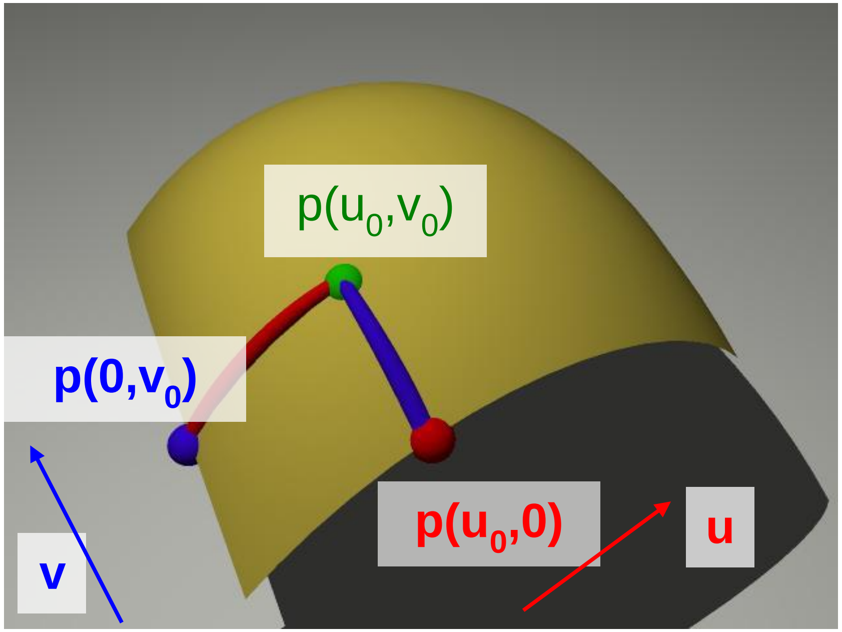
- Une surface paramétrique dans l'espace R^3 est définie par une fonction f :

$$f: \; D \times E \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$u, v \rightarrow p(u,v) = \begin{cases} x(u,v) = f_x(u,v) \\ y(u,v) = f_y(u,v) \\ z(u,v) = f_z(u,v) \end{cases}$$

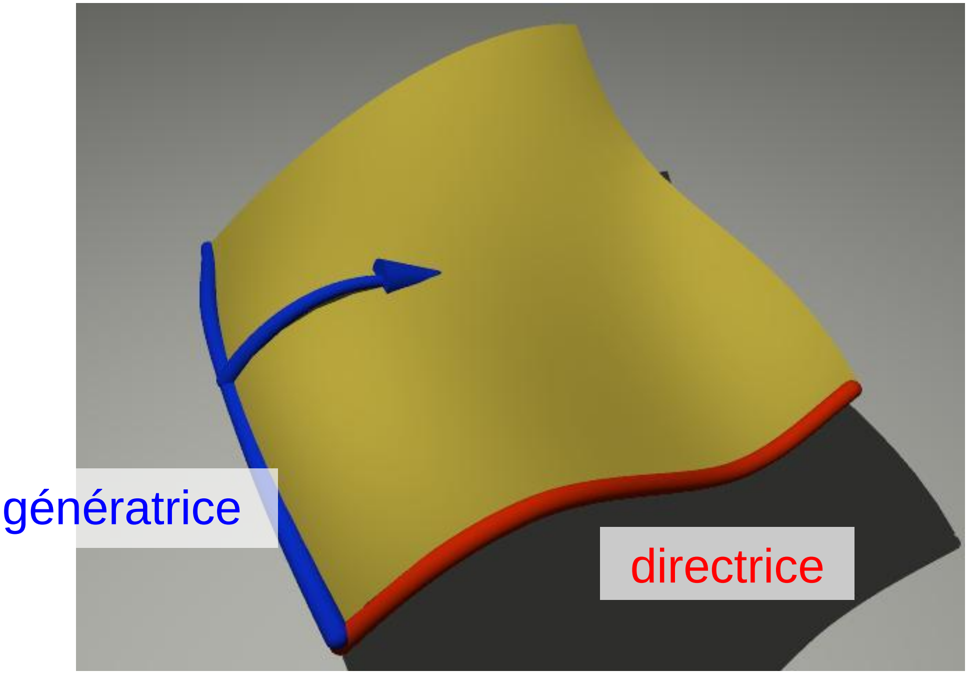
- Ainsi quand u parcourt D et v parcourt E, le point p(u,v) parcourt la surface

- Le point $p(u_0,v_0)$ est l'intersection entre 2 courbes **iso-paramétriques** : celle à **u** constant ($u=u_0$ en bleu) et celle à **v** constant ($v=v_0$ en rouge).



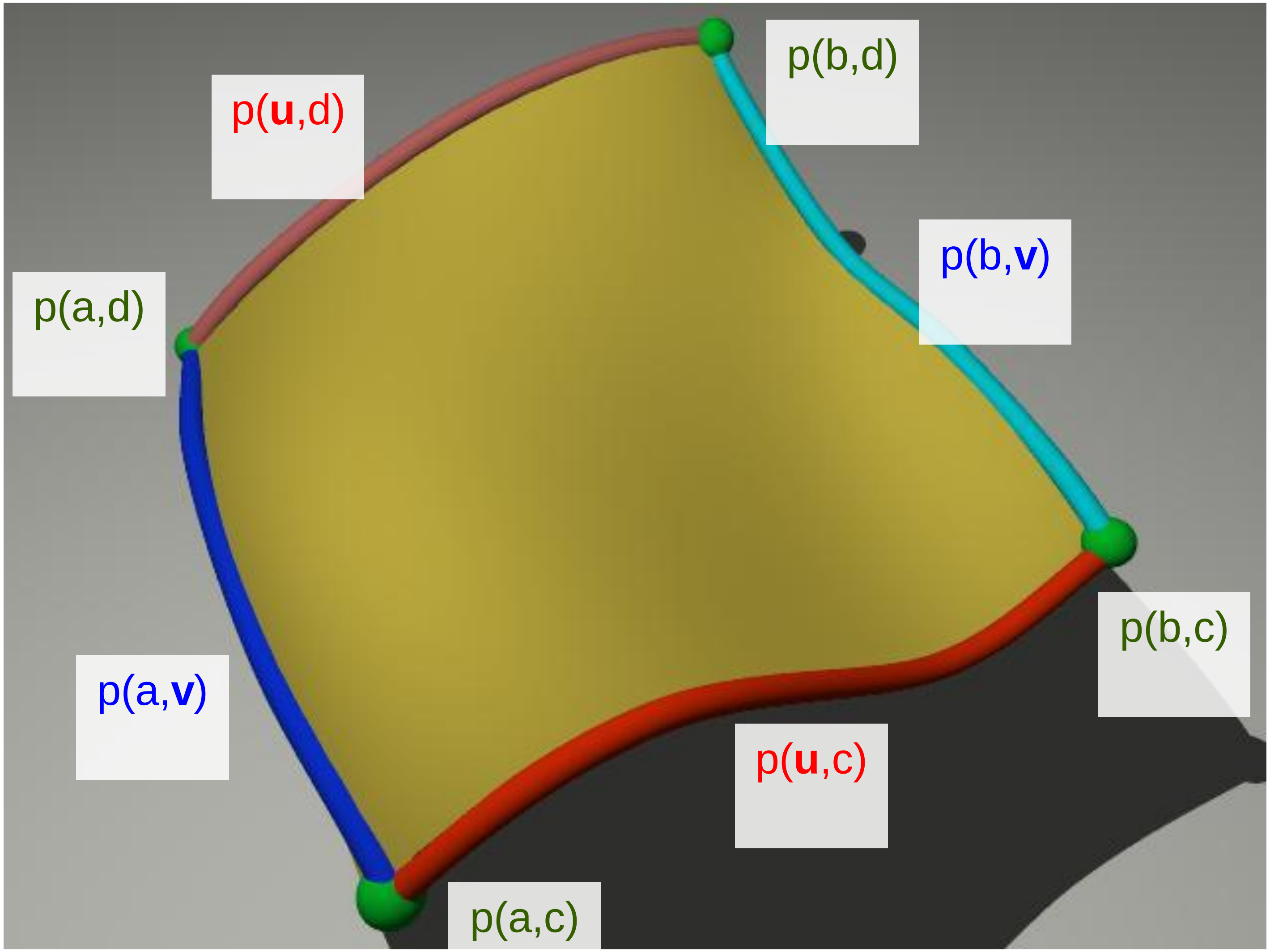
Produit tensoriel : principe

- Une façon de construire la surface paramétrique est de faire le produit tensoriel de deux courbes paramétriques. Une courbe $f_d(u)$ est appelée courbe directrice et l'autre courbe $f_g(v)$ est appelée courbe génératrice.
- La surface est obtenue en **déplaçant** et **déformant** la courbe génératrice le long de la courbe directrice.



Coins et bords

- Soient un (u,v) dans [a,b]x[c,d]

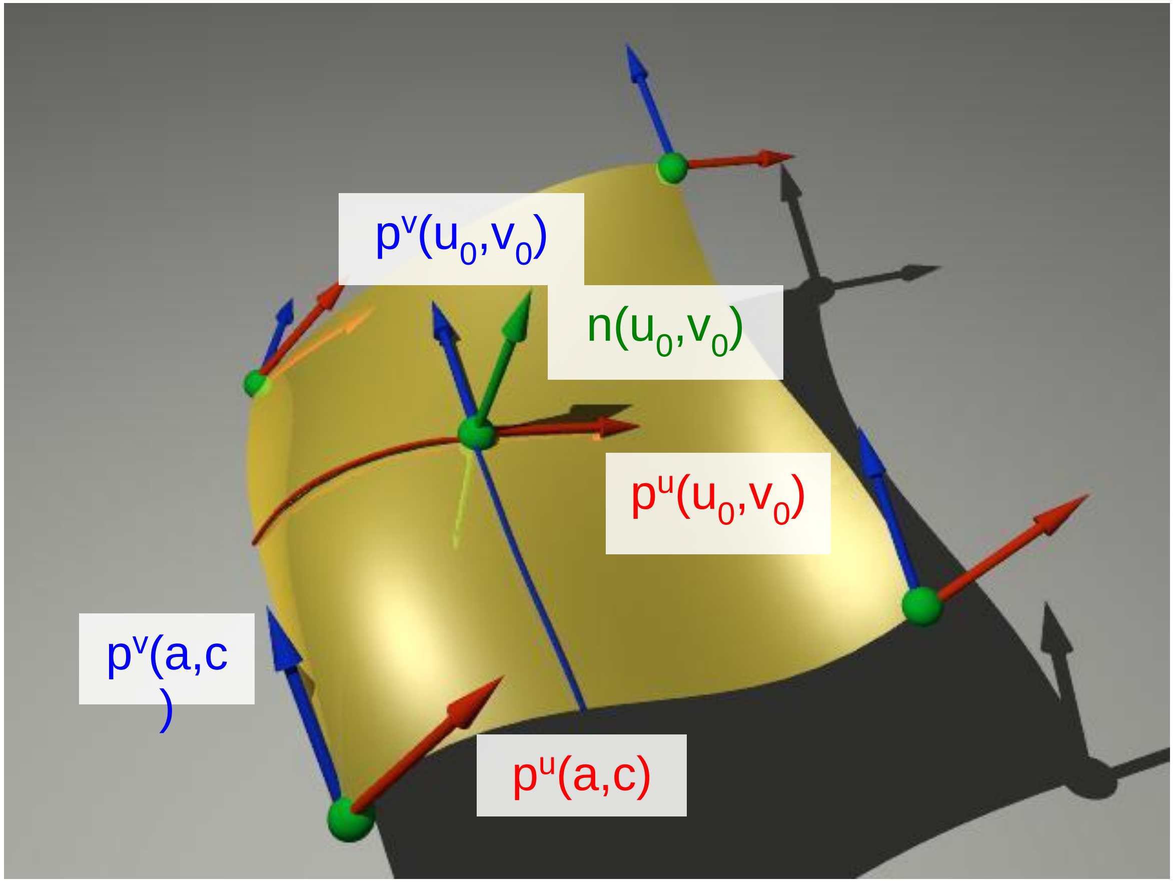


Tangentes et normales

- Le plan tangent est défini par les vecteurs tangentes $p^u(u_0,v_0)$ et $p^v(u_0,v_0)$ aux deux courbes iso-paramétriques passant par le point $p(u_0,v_0)$ considéré.
- La normale est donnée par le produit vectoriel des tangentes

La normale unitaire est donnée par :

$$n(u_{0,}v_0)=\frac{p^u(u_{0,}v_0)\times p^v(u_{0,}v_0)}{\|p^u(u_{0,}v_0)\times p^v(u_{0,}v_0)\|}$$



Carreau bi-cubique

- Un carreau bi-cubique est obtenu en faisant le produit tensoriel de fonctions polynomiales de degrés 3 (l'une suivant le paramètre u et l'autre suivant le paramètre v) :

$$p(u,v)=\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} a_{ij}u^i v^j \quad , \qquad a_{ij}\in\mathbb{R}$$

$$p(u,v)=a_{00}+a_{01}v+a_{02}v^2+a_{03}v^3+a_{10}u+a_{11}uv+a_{12}uv^2+a_{13}uv^3+\ldots+\ldots+a_{33}u^3v^3$$

- Ceci nous amène à la formulation matricielle suivante :

$$p(u,v)=U\,A\,V^T=\begin{bmatrix}u^3 & u^2 & u & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{33} & a_{32} & a_{31} & a_{30}\\ a_{23} & a_{22} & a_{21} & a_{20}\\ a_{13} & a_{12} & a_{11} & a_{10}\\ a_{03} & a_{02} & a_{01} & a_{00}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v^3\\ v^2\\ v\\ 1\end{bmatrix}$$

Comme pour les courbes cubiques, le contrôle de la forme de la surface par les coefficients a_{ij} n'est absolument pas intuitif => forme d'Hermite

Carreau bi-cubique d'Hermite

- La forme bi-cubique d'Hermite se dérive de l'expression utilisée pour les courbes d'Hermite :

$$p(u,v)=F(u)\,B\,F(v)^T \quad , \qquad (u,v)\in[0,1]^2$$

avec $F(u)=[F_1(u), F_2(u), F_3(u), F_4(u)]$

$F(v)=[F_1(v), F_2(v), F_3(v), F_4(v)]$

voir le cours sur les courbes d'Hermite pour l'expression des $F_i(u)$

$$B=\begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{00}^{v} & p_{01}^{v} \\ p_{10} & p_{11} & p_{10}^{v} & p_{11}^{v} \\ p_{00}^{u} & p_{01}^{u} & p_{00}^{uv} & p_{01}^{uv} \\ p_{10}^{u} & p_{11}^{u} & p_{10}^{uv} & p_{11}^{uv} \end{bmatrix}$$

Carreaux de Bézier : maillage de contrôle

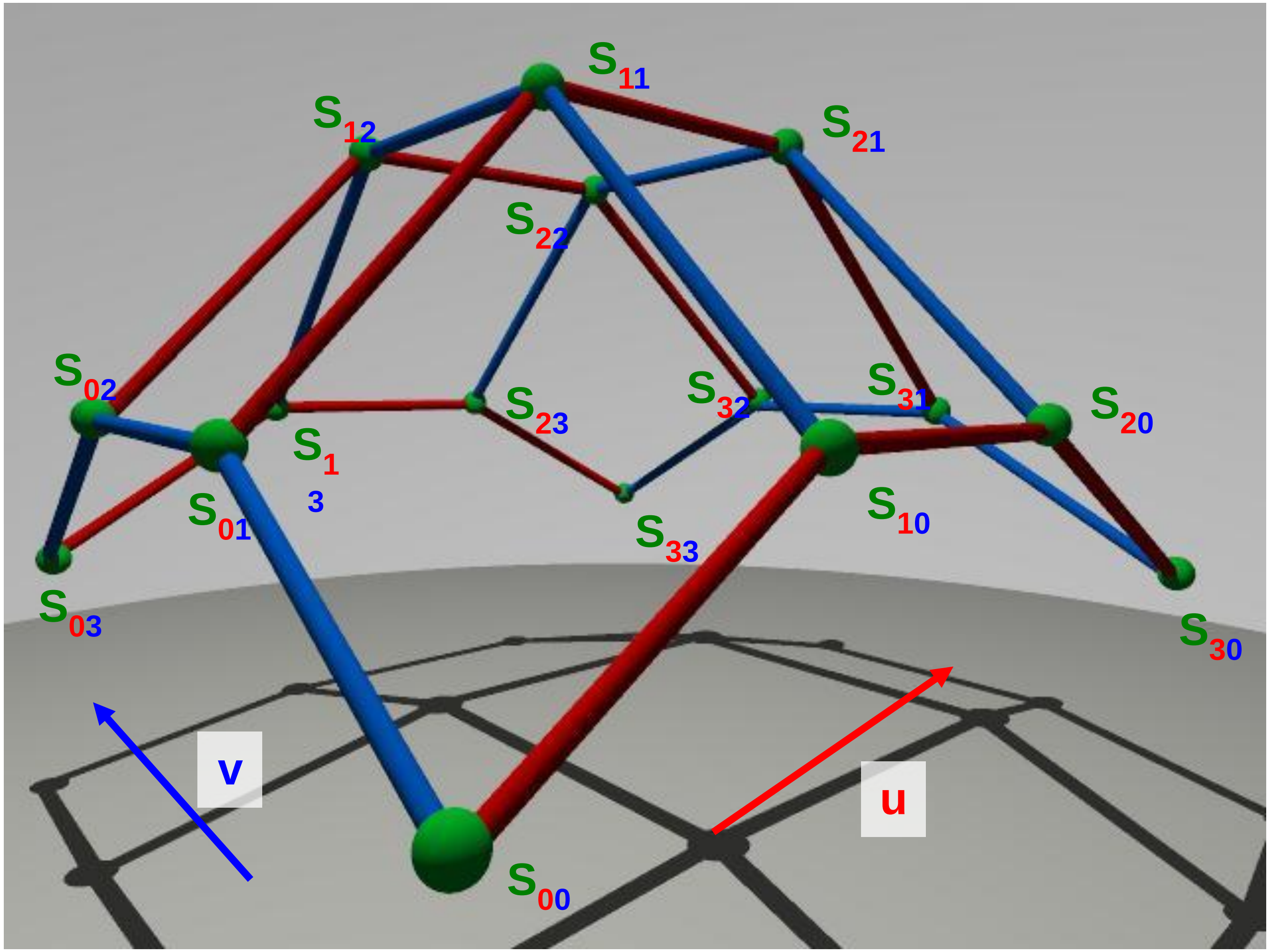
- $(u, v) \in [0,1]^2$

- La surface est contrôlée à partir d'un maillage régulier composé de quadrilatères

- Les points de contrôles sont les sommets S_{ij} du maillage et il sont numérotés dans les directions de u et de v

  - Les **(n+1)** points de contrôle en **u** donnent le degré **n** des courbes en u. Ici n = 3.

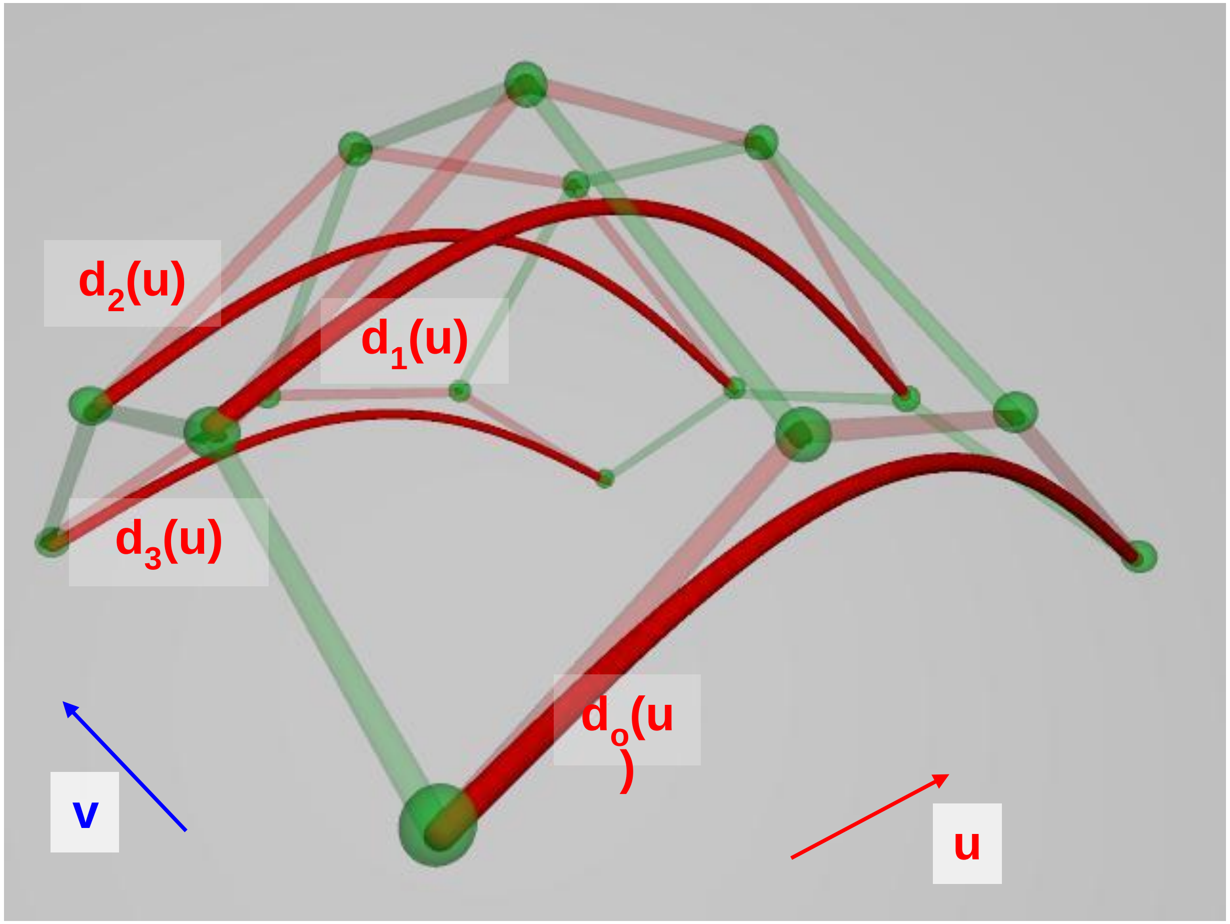
  - Les **(m+1)** points de contrôle en **v** donnent le degré **m** des courbes en v. Ici m = 3.



Carreaux de Bézier : produit tensoriel

- Pour évaluer un point $p(u_0,v_0)$ sur la courbe, on effectue un produit tensoriel :
  - Si nous choisissons les directrices dans la direction de **u**
    - Il y a une directrice $d_j(u)$, $(j=0..m)$ par polygone de contrôle dans la direction des u
    - Le polygone de contrôle de la directrice $d_j(u)$ est défini par les points de contrôle S_{ij} $(i=0..n)$
    - Une directrice est une courbe de Bézier définie par :

$$d_j(u) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(u) S_{ij}$$



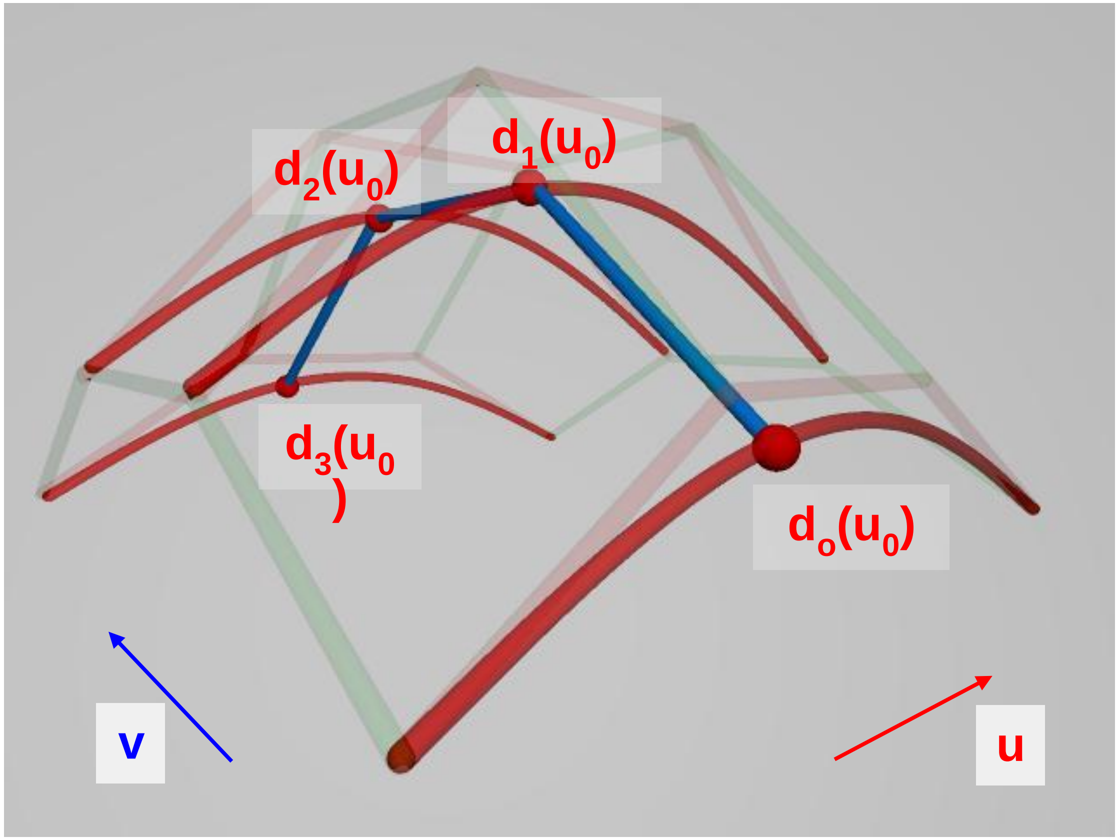
Carreaux de Bézier : produit tensoriel

- Pour chaque directrice (en rouge), on évalue le point $d_j(u_0)$:

$$d_j(u_0) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(u_0) S_{ij}, j = 0, \dots, m$$

- Les $d_j(u_0)$ sont les sommets du polygone de contrôle (en bleu) de la courbe génératrice g(v) :

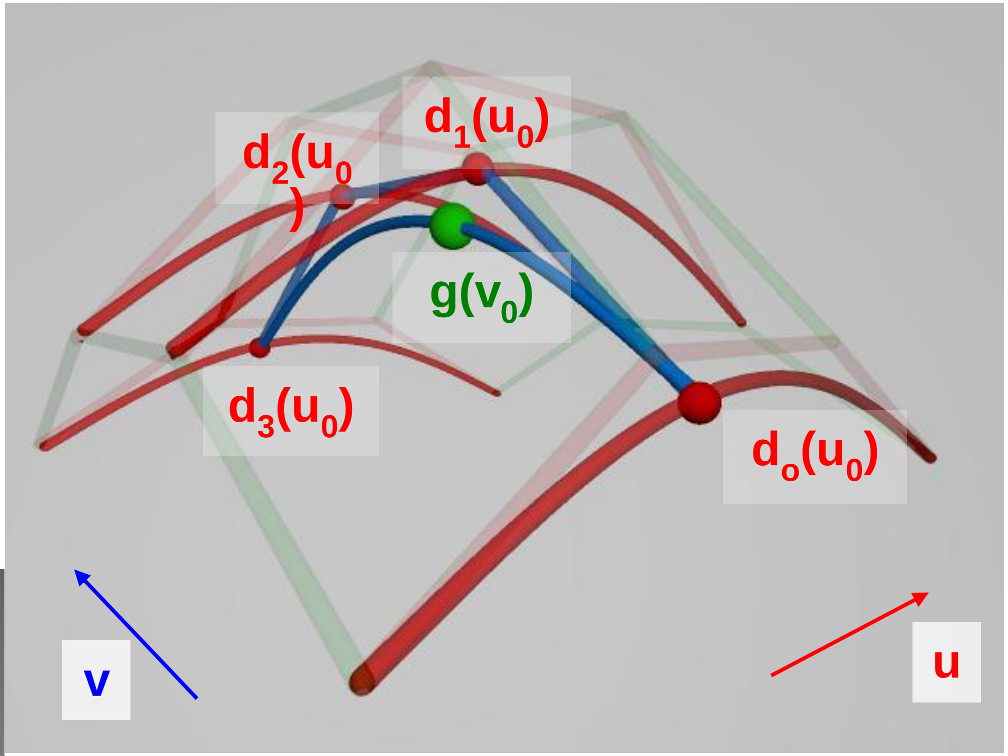
$$g(v) = \sum_{j=0}^{m} B_j^m(v) d_j(u_0)$$

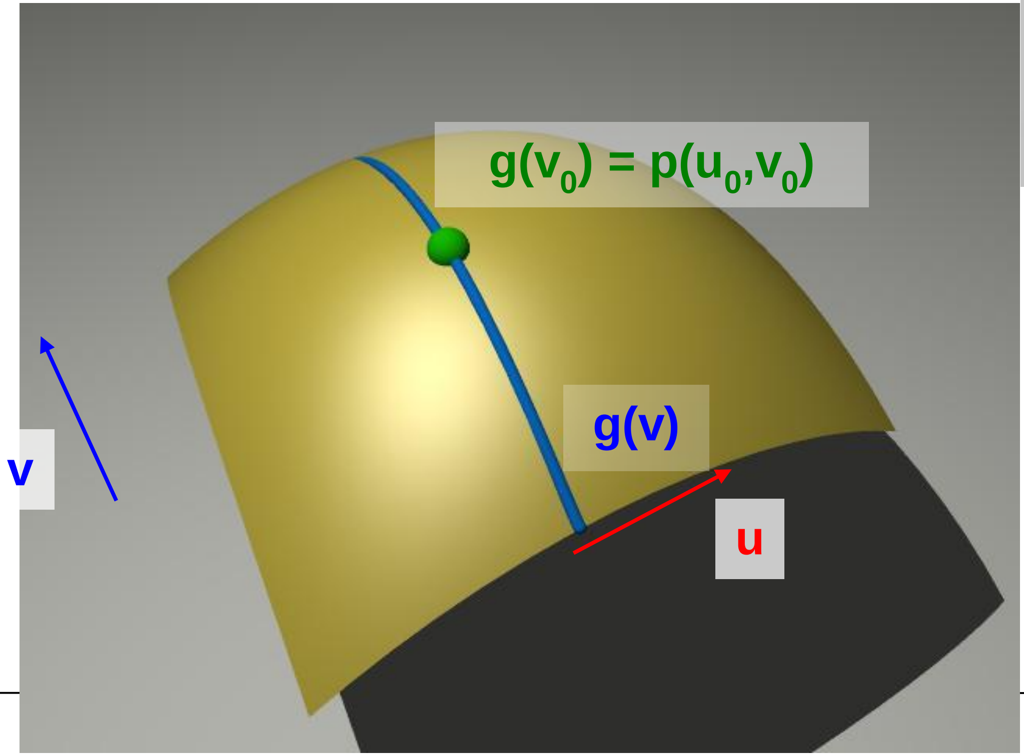


Carreaux de Bézier : produit tensoriel

- La génératrice est sur la surface et le point de la surface $p(u_0,v_0)$ est alors celui de la courbe génératrice $g(v)$ en $v=v_0$

$$g(v_0) = \sum_{j=0}^{m} B_j^m(v_0) d_j(u_0)$$





En reportant l'équation des $d_j(u)$ dans l'équation de $g(v)$, on obtient l'équation du carreau de Bézier :

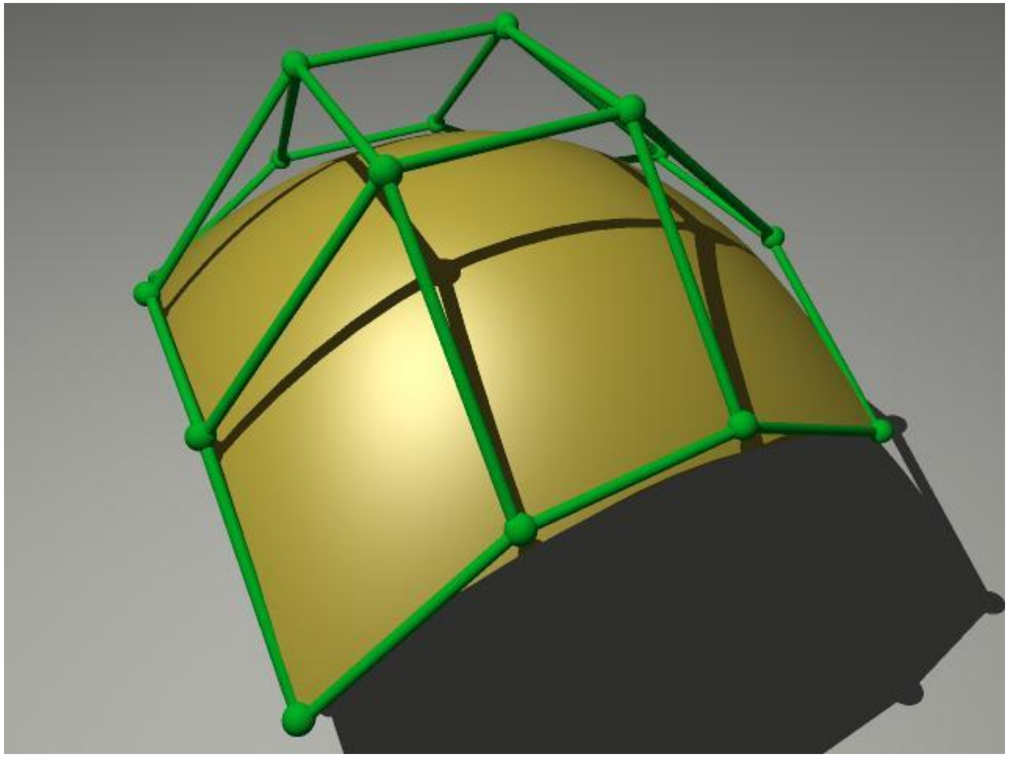
$$p(u,v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} B_i^n(u) B_j^m(v) S_{ij}$$

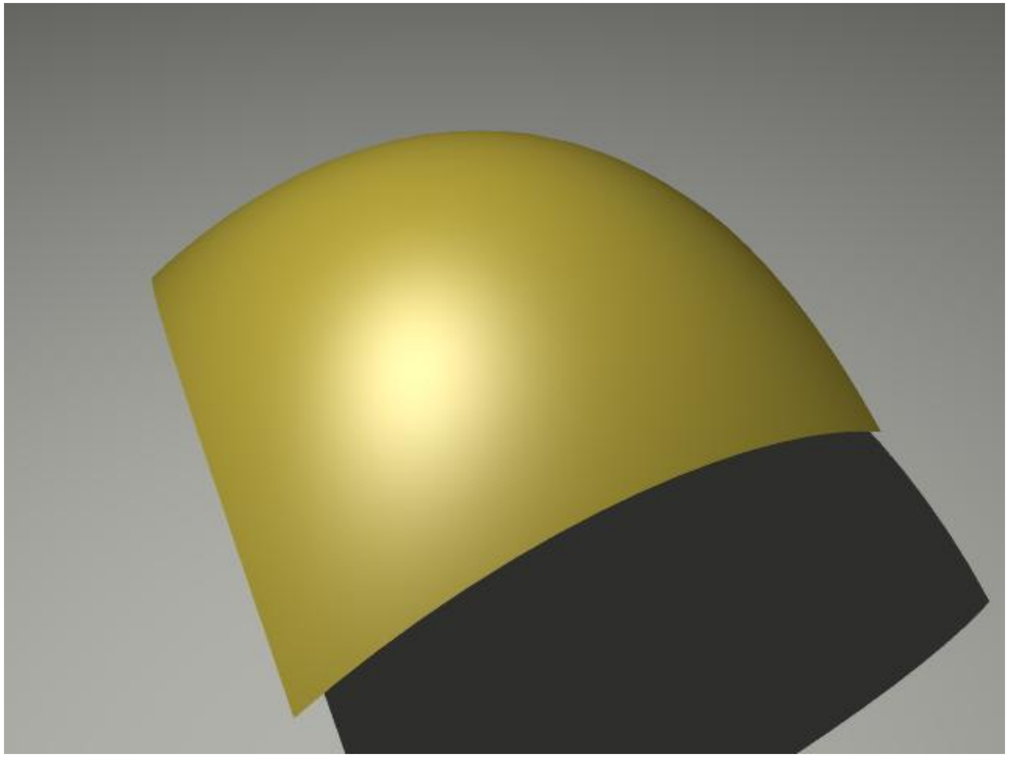
Carreaux de Bézier : définition

- Un carreau de Bézier est défini à partir d'un maillage de contrôle et des polynômes de Bernstein de la façon suivante :

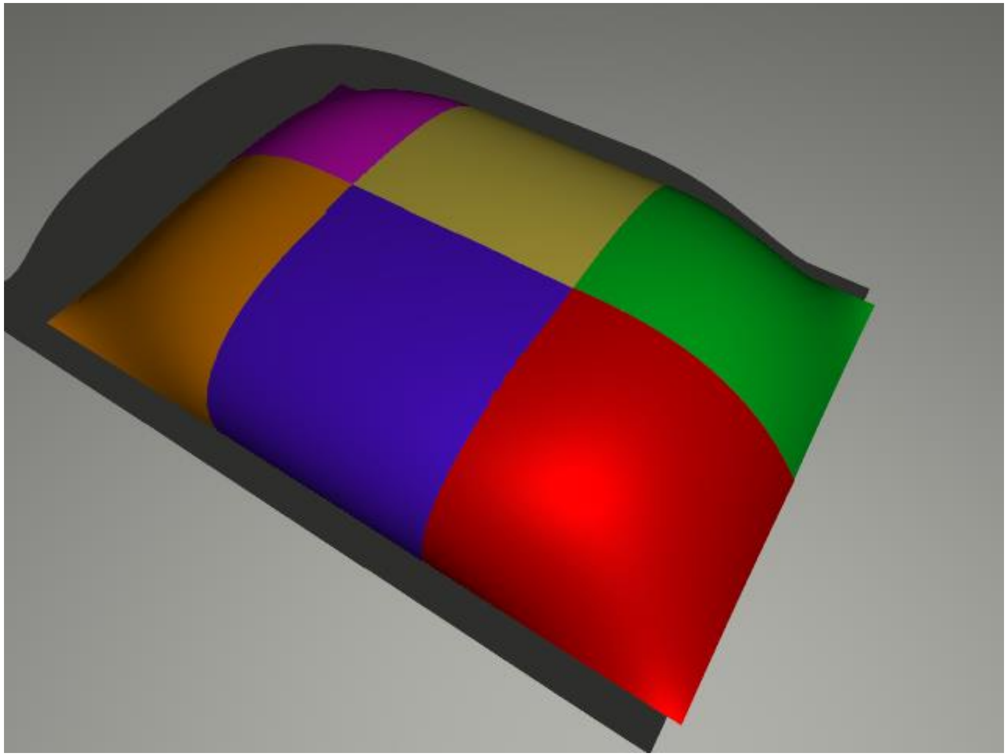
$$\mathrm{p}(u,v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} B_i^n(u) B_j^m(v) S_{ij}$$

Exemple de carreau bi-cubique = produit tensoriel de deux courbes de degré 3 (ordre 4)

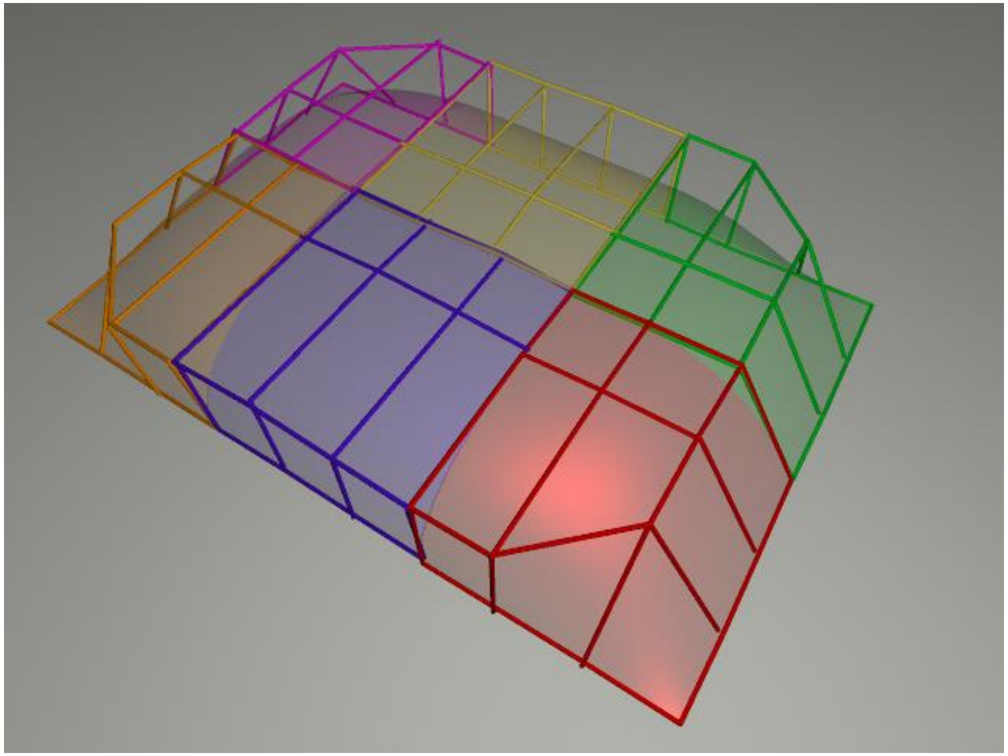




Modélisation par carreaux



- C'est une modélisation type couture. On joint les carreaux les uns aux autres en jouant sur la position des points de contrôles

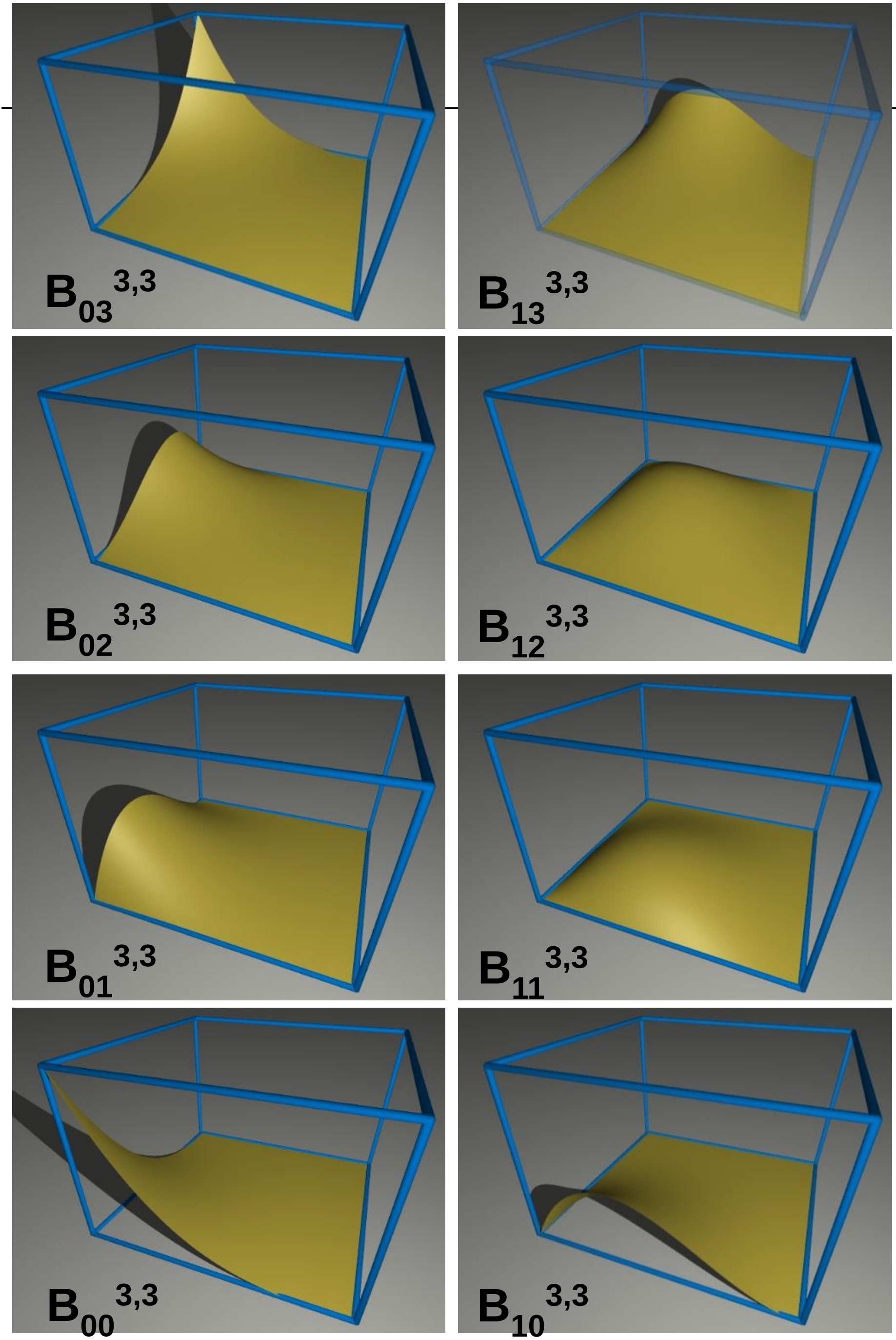


Les fonctions de base

- Les carreaux de Bézier sont construits par produit tensoriel de courbes de Bézier.
- Néanmoins, il est important de bien voir qu'ils sont obtenus par combinaison barycentrique de leurs points de contrôle :

$$\boxed{p(u,v) = \sum_{i=0,j=0}^{n,m} B_{ij}^{n,m}(u,v) S_{ij}} \quad , \qquad (u,v) \in [0,1]^2$$

Fonctions de base pour un carreau de Bézier bi-cubique



- Les 8 autres fonctions de base $B_{2j}^{3,3}$ et $B_{3j}^{3,3}$ sont obtenues par symétrie.