Transformations, visualisation

C. Le Bihan Gautier

Extraits du cours de G. Gesquière, LIRIS

Plan

- quelques rappels de maths ;
- transformations de l'espace ;
- projections ;
- visualisation ;

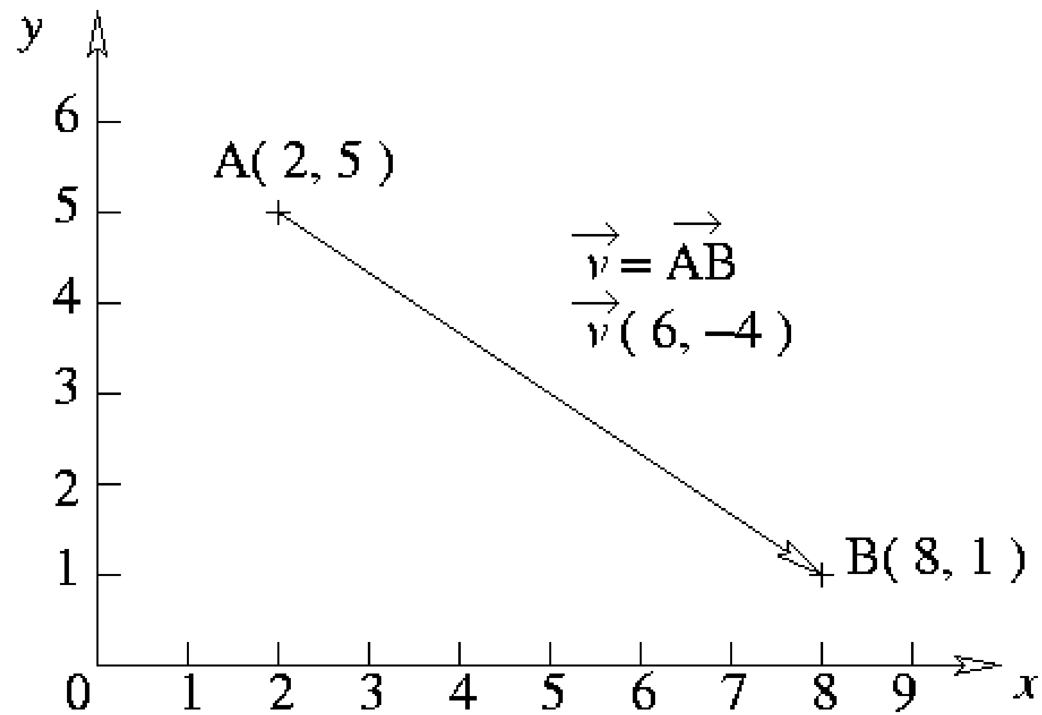
I. Quelques rappels de maths / Vecteur

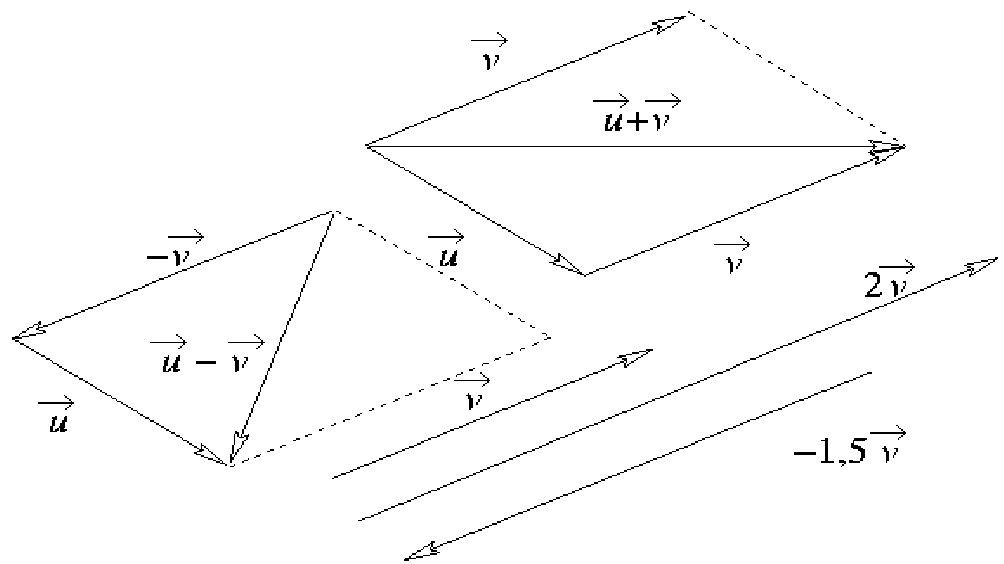
1) Vecteur

- coordonnées (x, y, ...) telles que

  $$x = B.x - A.x$$
  $$y = B.y - A.y$$
  $$\dots$$

- opérations :
  - addition ;
  - soustraction ;
  - multiplication par un scalaire.





I. Quelques rappels de maths / Vecteur

Définition de la norme d'un vecteur

Dans un repère orthonormé, la norme d'un vecteur est :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{{u_x}^2 + {u_y}^2 + \ldots}$$

Propriétés de la norme d'un vecteur

- la norme d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la ***distance*** de A à B
- un vecteur de norme 1 est dit ***normé***.
- pour tout vecteur $\vec{u}$ non nul, il existe un vecteur normé de même direction :

$$\vec{u}_{normé} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$$

I. Quelques rappels de maths / Vecteur

Définition du produit scalaire de deux vecteurs

Dans un repère orthonormé, le produit scalaire associe deux vecteurs à un nombre réel :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=u_x\times v_x+u_y\times v_y+\dots$$

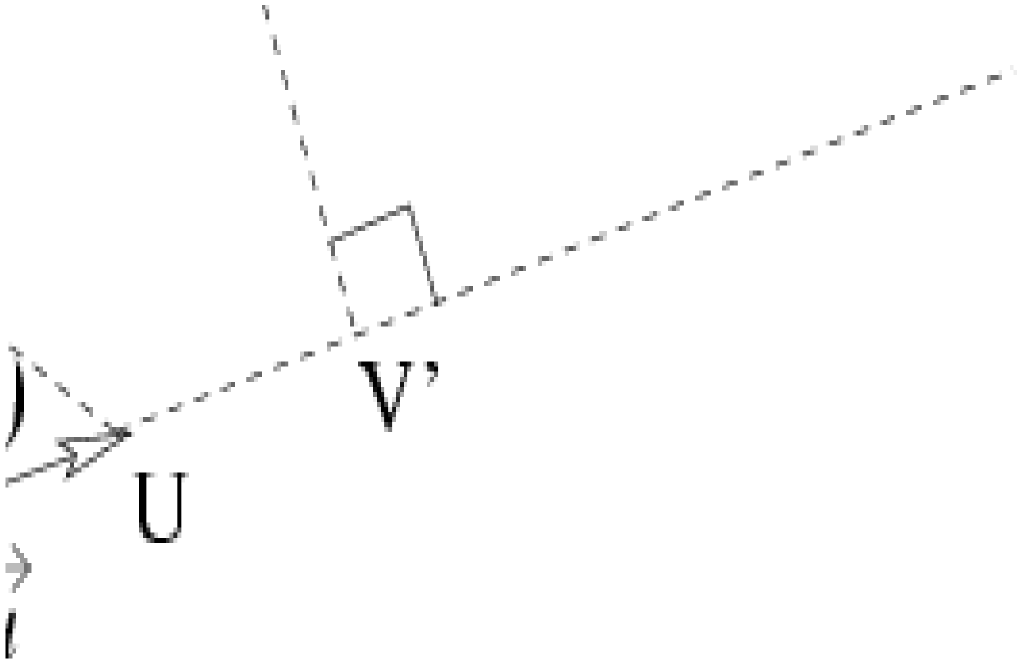
Propriétés du produit scalaire de deux vecteurs

- symétrie : $\vec{u}\cdot\overrightarrow{u'}=\overrightarrow{u'}\cdot\vec{u}$
- distributivité : $\left(\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2}\right)\cdot\overrightarrow{u_3}=\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_3}+\overrightarrow{u_2}\cdot\overrightarrow{u_3}$
- homogénéité : $\left(\alpha\,\vec{u}\right)\cdot\overrightarrow{u'}=\alpha\left(\vec{u}\cdot\overrightarrow{u'}\right)$
- lien avec la norme : $\vec{u}\cdot\vec{u}=\left\|\vec{u}\right\|^2$

I. Quelques rappels de maths / Vecteur

Application du produit scalaire dans le plan

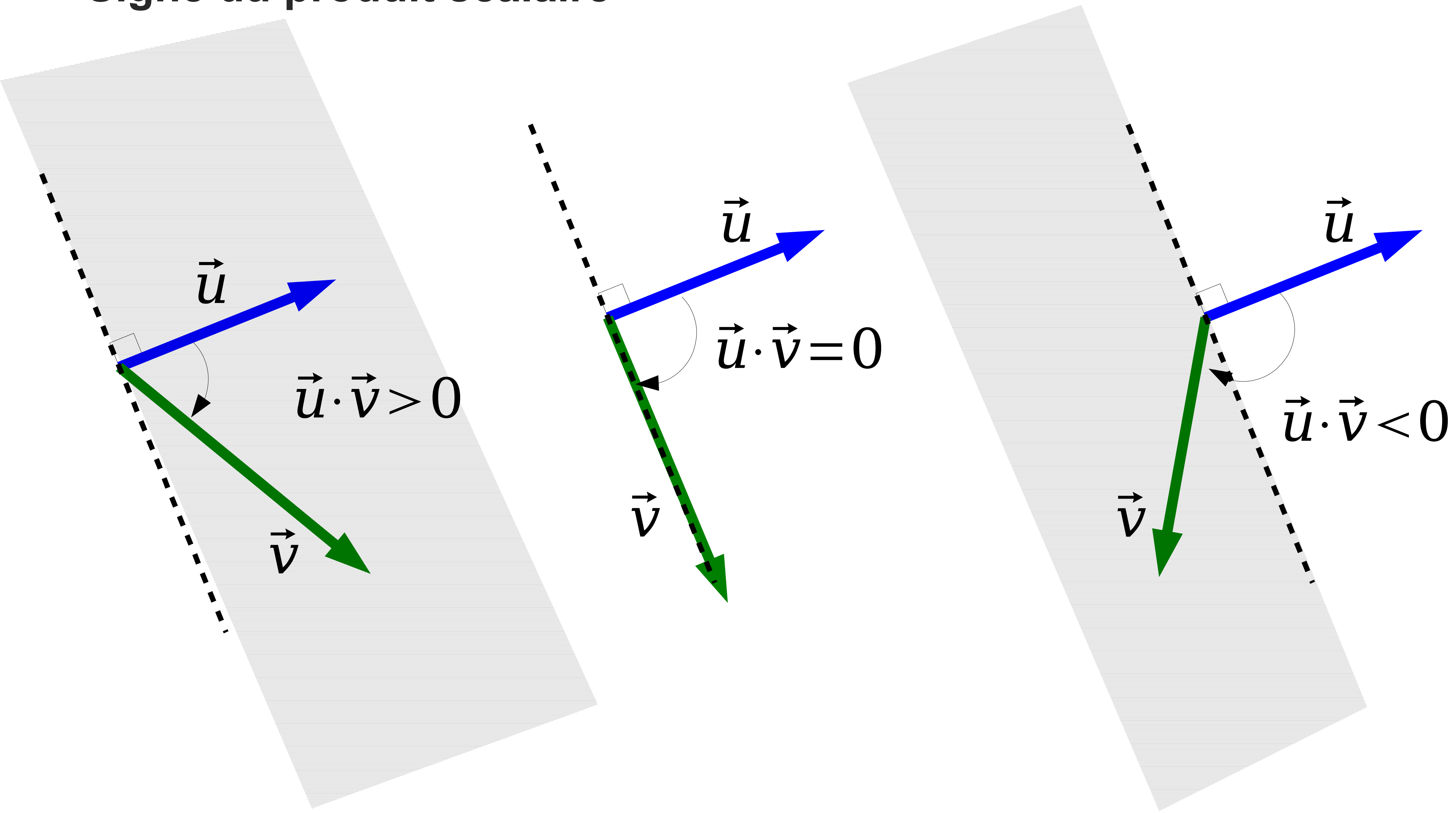
$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\left(\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})\right)$$



-> calcul de l'angle entre 2 vecteurs

I. Quelques rappels de maths / Vecteur

Signe du produit scalaire



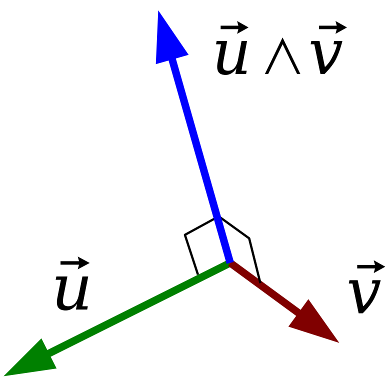
I. Quelques rappels de maths / Vecteur

Définition du produit vectoriel de deux vecteurs

Dans un repère orthonormé, le produit vectoriel associe deux vecteurs à un vecteur résultat :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{bmatrix} u_y \times v_z - u_z \times v_y \\ u_z \times v_x - u_x \times v_z \\ u_x \times v_y - u_y \times v_x \end{bmatrix}$$

->le vecteur résultat est **orthogonal** aux deux premiers (utile pour les repères, les normales, ...)



I. Quelques rappels de maths / Matrices

2) Matrices

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix}$$ = collection de vecteurs

Opérations :

- Addition : $$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_0 & t_1 \\ u_0 & u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0+t_0 & a_1+t_1 \\ b_0+u_0 & b_1+u_1 \end{bmatrix}$$

- multiplication par un scalaire : $$n \times \begin{bmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n\times a_0 & n\times a_1 \\ n\times b_0 & n\times b_1 \end{bmatrix}$$

- multiplication par une matrice :

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} t_0 & t_1 \\ u_0 & u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_0\times t_0+a_1\times u_0) & (a_0\times t_1+a_1\times u_1) \\ (b_0\times t_0+b_1\times u_0) & (b_0\times t_1+b_1\times u_1) \end{bmatrix}$$

I. Quelques rappels de maths / Matrices

Opérations supplémentaires sur les matrices

- déterminant, cofacteurs ;
- inversion (délicat), peut ne pas être possible (revient au problème de recherche de solutions d'équations) ;
- transposée

Autres besoins :

- *équations paramétriques de droites et courbes ;*
- *équations implicites de plans ;*
- *changements de repères.*

Rappel du plan

- ~~quelques rappels de maths ;~~
- transformations de l'espace ;
- projections ;
- Visualisation ;

II. Transformations de l’espace

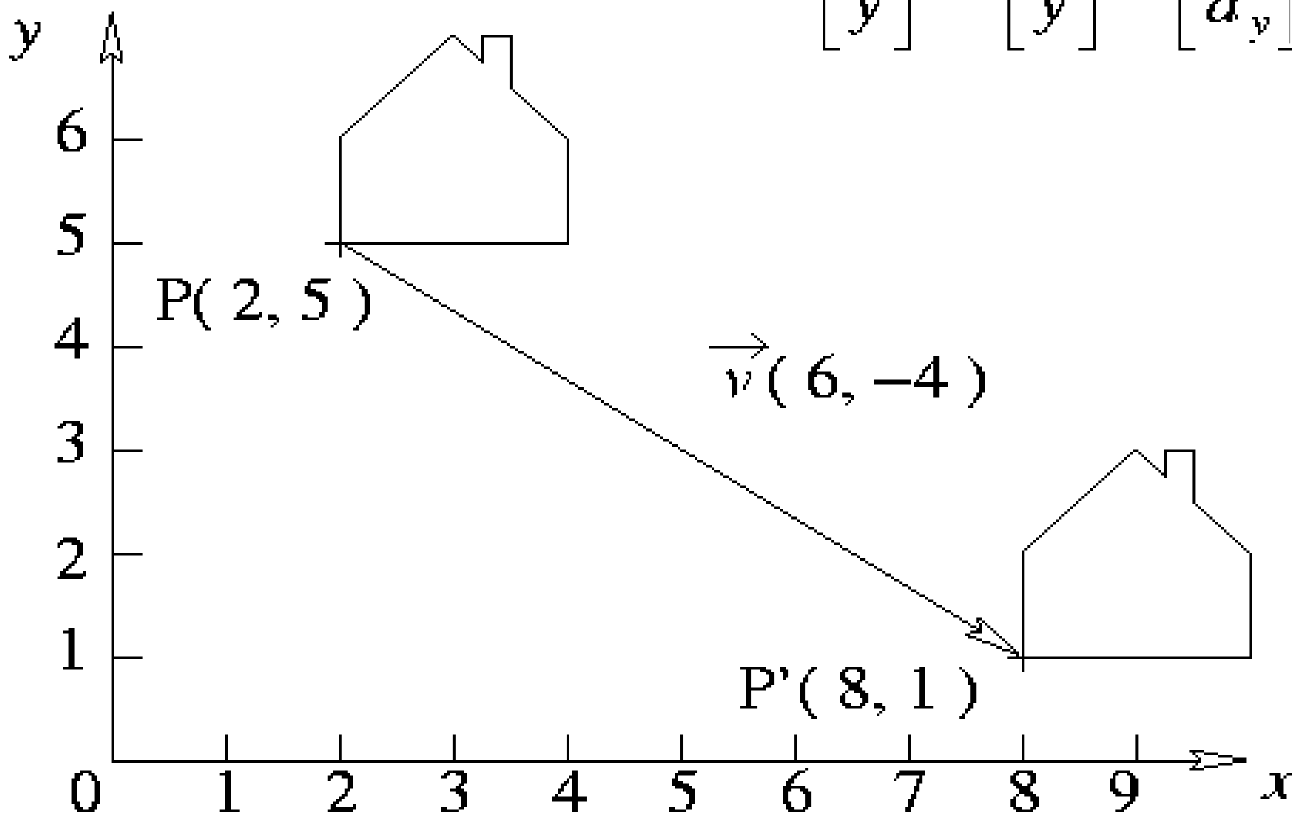
- survol en 2D ;
- coordonnées homogènes ;
  - translation ;
  - mise à l'échelle (scaling) ;
  - rotation ;
  - réflexions ;
- compositions de transformations.

II. Transformations / Survol en 2D

1) Survol en 2D

Translation de vecteur $\vec{v}$ du point : $P \quad P' = P + \vec{v}$

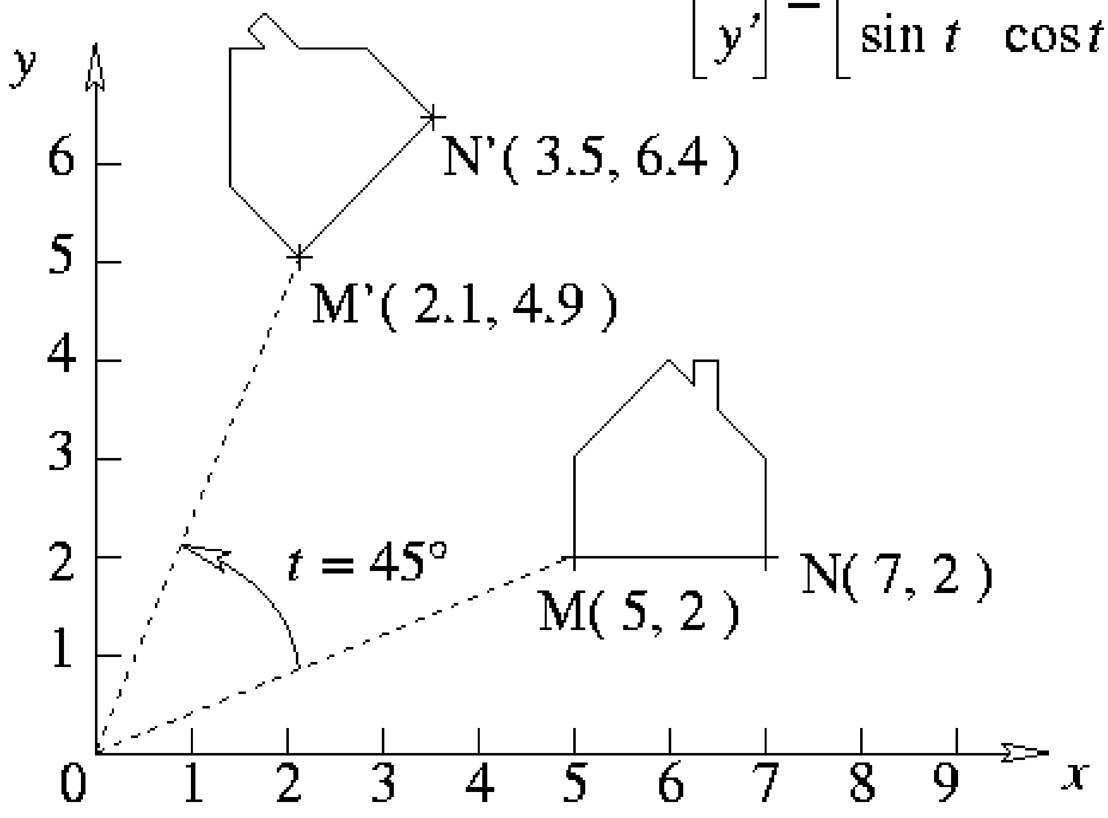
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix}$$



II. Transformations / Survol en 2D

Rotation de centre *O* et d'angle t : $P' = R_t \cdot P$

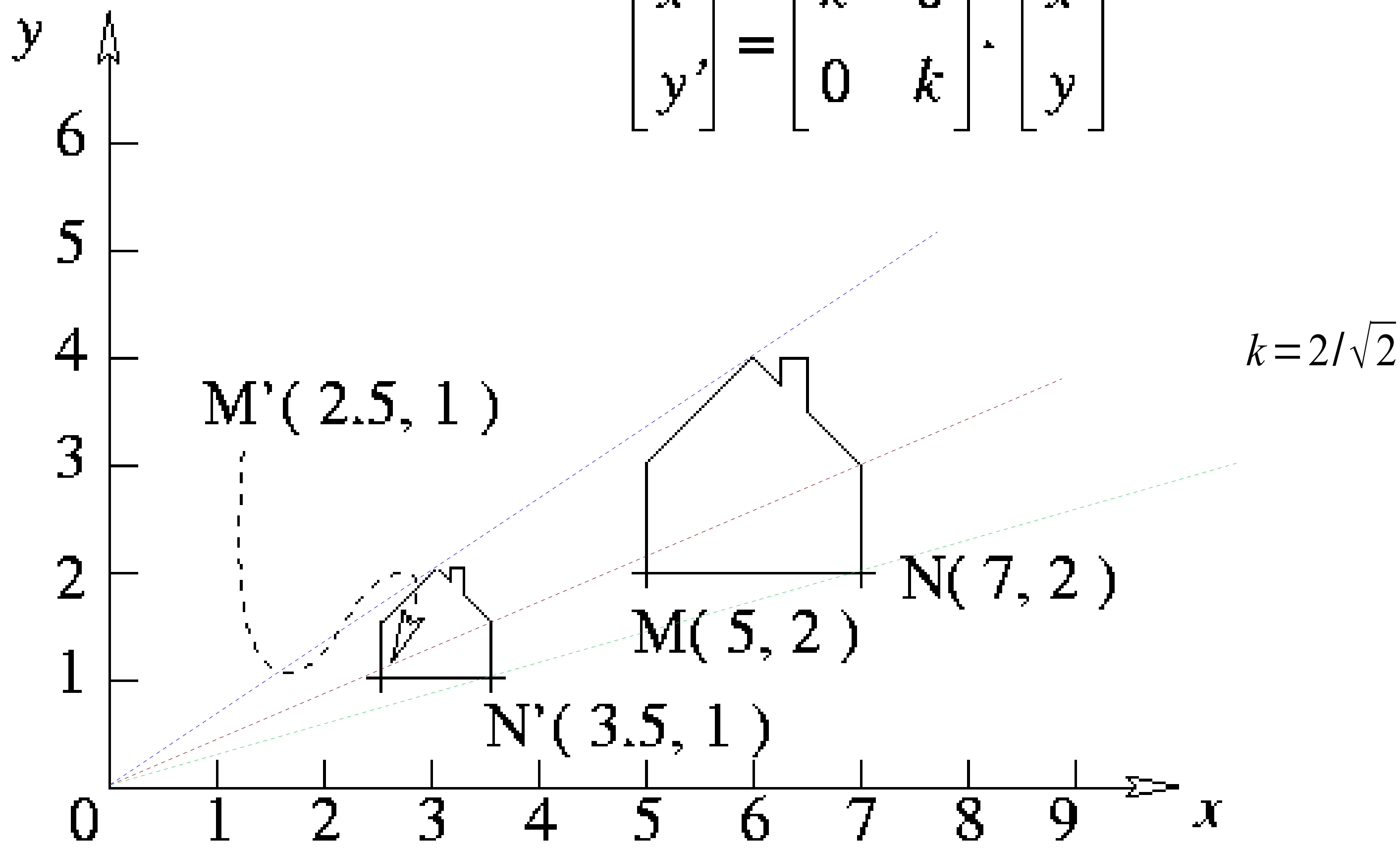
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



II. Transformations / Survol en 2D

Homothétie de centre *O* et de rapport *k* : $P' = k \cdot P$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



II. Transformations / Survol en 2D

Les mêmes relations peuvent êtres écrites en 3D. Il se pose alors 3 problèmes :

- opérations différentes pour les translations (addition de matrices) ;
- pb de commutativité ;
- pb de la rotation 3D (définition de centre, continuité).

II. Transformations de l’espace

- ~~survol en 2D ;~~
- coordonnées homogènes ;
  - translation ;
  - mise à l'échelle (scaling) ;
  - rotation ;
  - réflexions ;
- compositions de transformations.

II. Transformations / Coordonnées homogènes

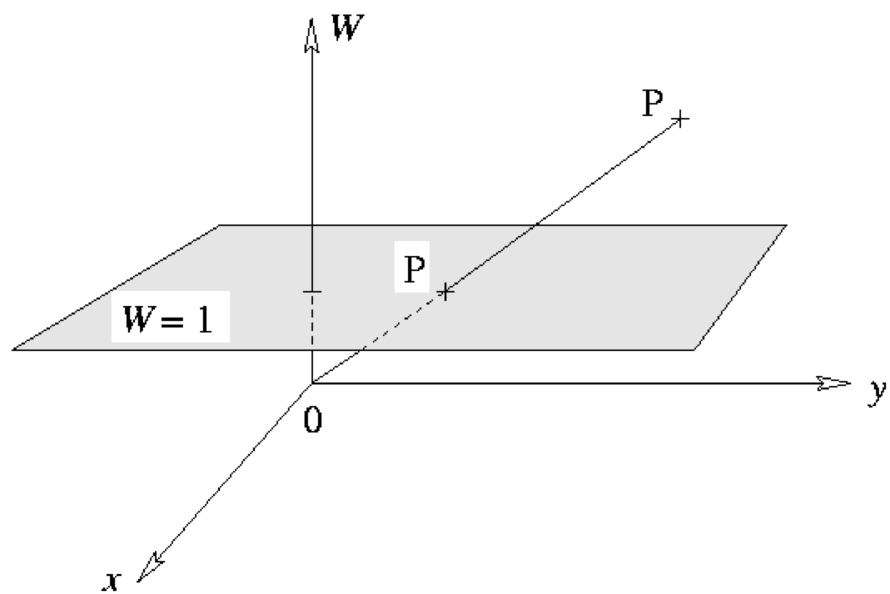
Pour résoudre le problème d'écriture des opérations : on passe en ***coordonnées homogènes***.

-> on ajoute une coordonnée, ***w***

Les coordonnées homogènes permettent de représenter toutes les transformations affines comme des produits de matrice.

Valeurs de ***w*** :

- *1 pour les points ;*
- *0 pour les vecteurs.*



II. Transformations / Coordonnées homogènes

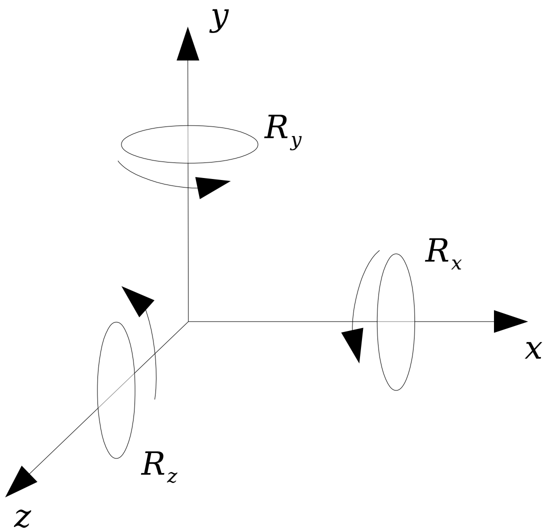
Passage en coordonnées homogènes $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_h \\ y_h \\ z_h \\ w_h \end{bmatrix}$ avec $\begin{matrix} x = x_h / w_h \\ y = y_h / w_h \\ z = z_h / w_h \end{matrix}$

Translation $P' = P + \vec{T} \rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix}_{P'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_T \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}_P$

Mise à l'échelle $P' = S \cdot P \rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix}_{P'} = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_S \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}_P$

Réflexion $P' = M \cdot P \rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix}_{P'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_M \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}_P$ (par rapport à y)

Rotation 3D en coordonnées homogènes



Rotation autour d'un axe *(x, y, z)* d'angle α :

$$R=\begin{bmatrix} tx^2+c & txy+sz & txz-sy & 0 \\ txy-sz & ty^2+c & tyz+sx & 0 \\ txz+sy & tyz-sx & tz^2+c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{matrix} s=\sin\alpha \\ c=\cos\alpha \\ t=1-\cos\alpha \end{matrix}$$

Rotation autour de *(Ox)*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotation autour de *(Oy)*

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotation autour de *(Oz)*

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

II. Transformations de l’espace

- ~~survol en 2D ;~~
- ~~coordonnées homogènes ;~~
  - ~~translation ;~~
  - ~~mise à l'échelle (scaling) ;~~
  - ~~rotation ;~~
  - ~~réflexions ;~~
- compositions de transformations.

II. Transformations / Compositions

Les compositions s'écrivent comme des suites de transformations :

Exemple de 2 transformations : rotation puis mise à l'échelle.

Problème : translation puis mise à l'échelle :

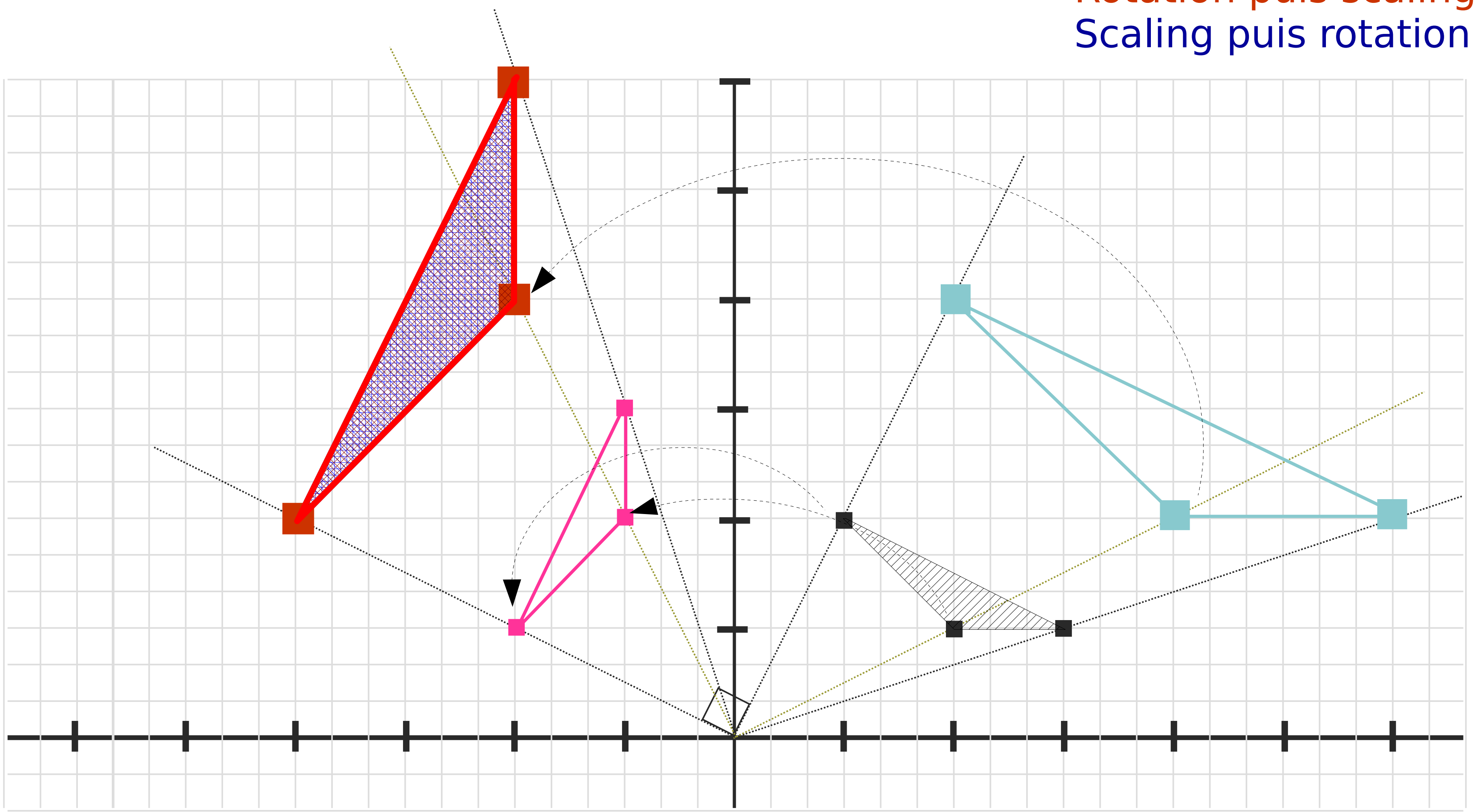
$$\begin{aligned} P' &= R_\alpha P \\ P'' &= S_k P' \end{aligned} \quad \rightarrow \quad P'' = (S_k R_\alpha) P$$

(par contre elles sont homogènes)

$$\begin{aligned} P' &= P + \vec{T} \\ P'' &= S_k P' \end{aligned} \quad \rightarrow \quad P'' = S_k P + S_k \vec{T}$$

Pb de commutativité des transformations ? l'ordre est-il important ?

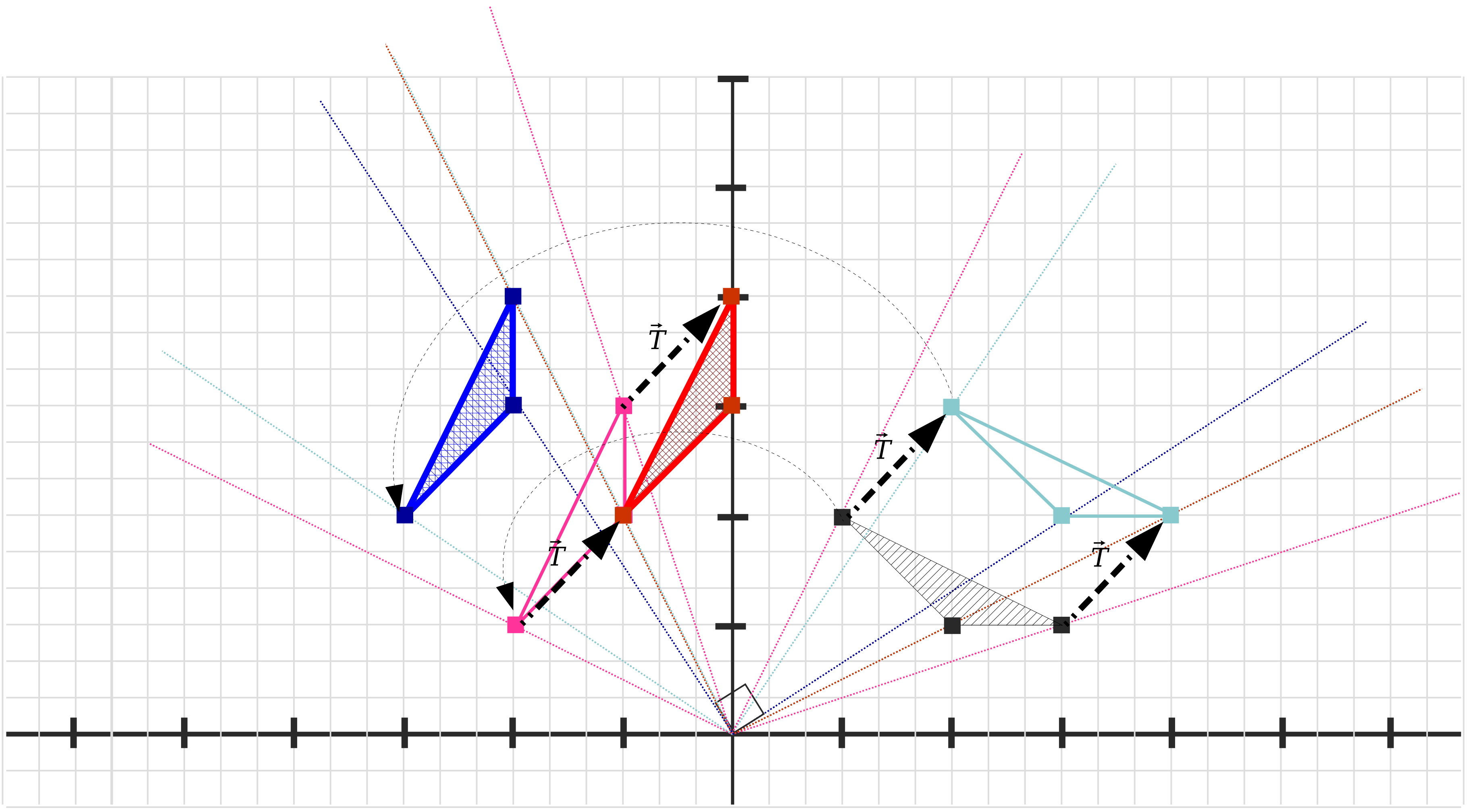
Rotation puis scaling
Scaling puis rotation



II. Transformations / Compositions

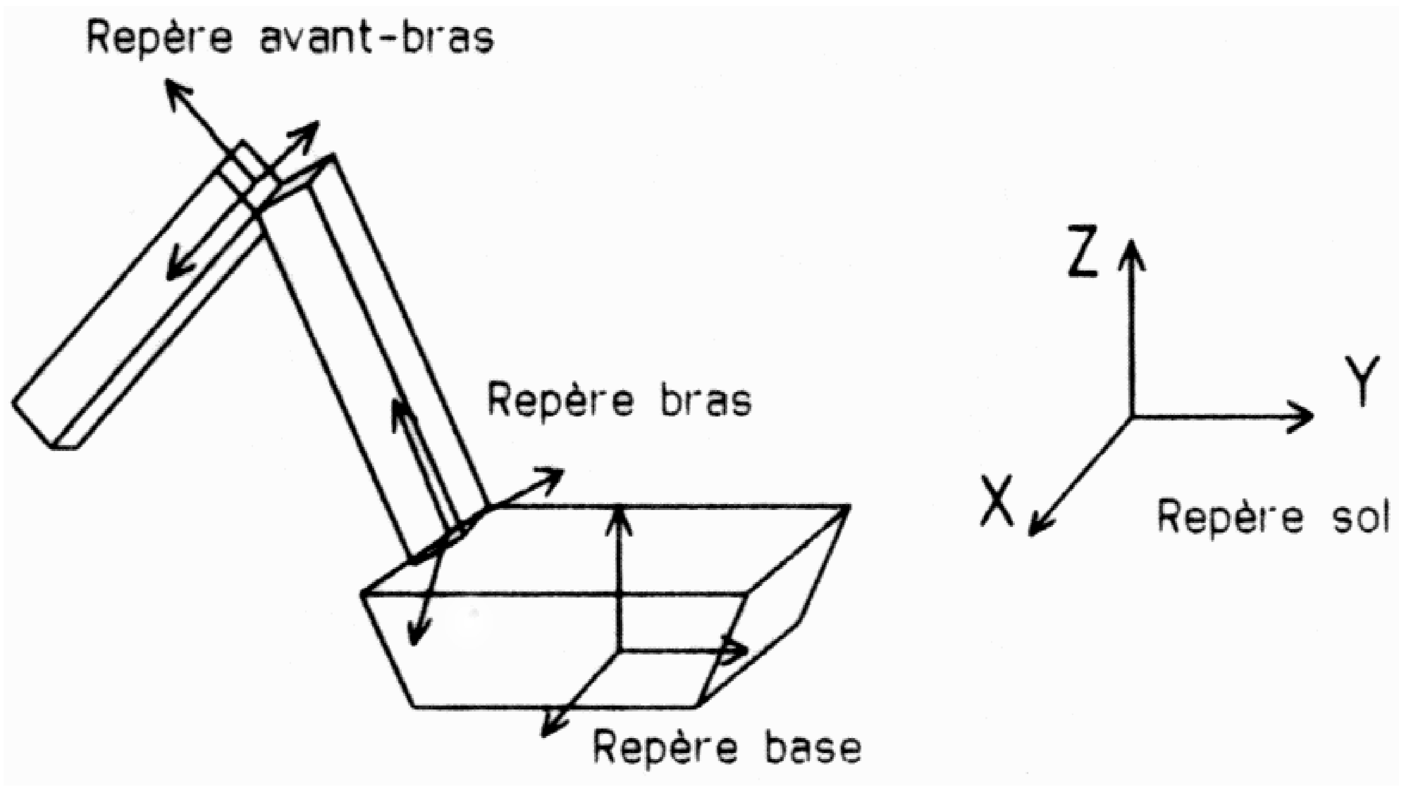
Pb de commutativité ?

Rotation puis translation
Translation puis rotation



II. Transformations / Compositions

Exemples d’utilisation (1) : principe de modélisation



II. Transformations de l’espace

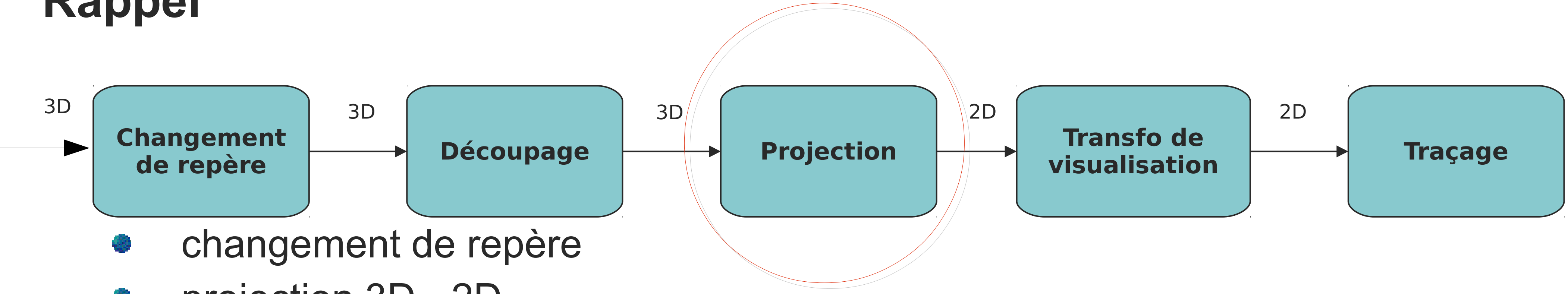
- ~~survol en 2D ;~~
- ~~coordonnées homogènes ;~~
  - ~~translation ;~~
  - ~~mise à l'échelle (scaling) ;~~
  - ~~rotation ;~~
  - ~~réflexions ;~~
- ~~compositions de transformations.~~

Plan

- ~~quelques rappels de maths ;~~
- ~~transformations de l’espace ;~~
- projections ;
- visualisation ;

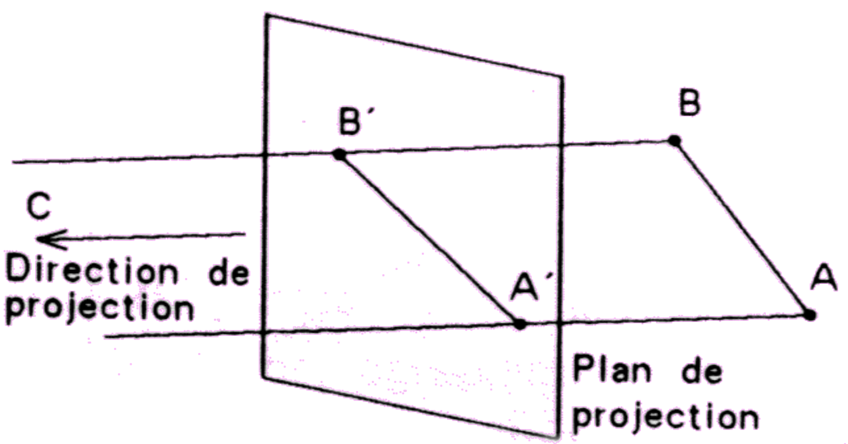
III. Projections

Rappel

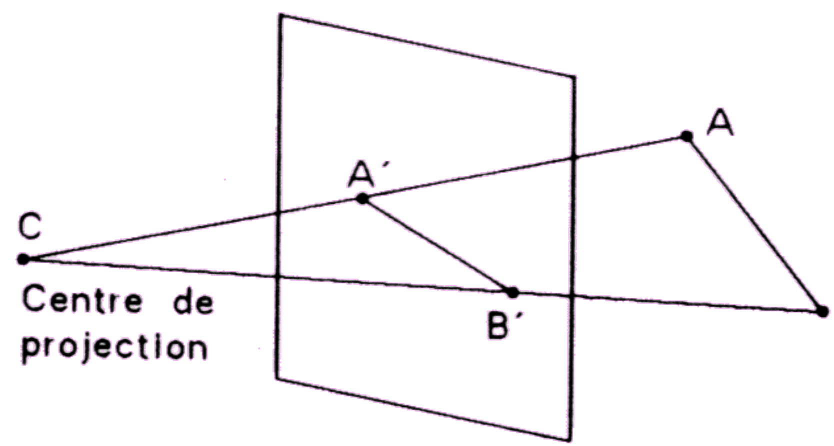


- changement de repère
- projection 3D - 2D

1) projections ***parallèles*** :
- orthographique
- oblique



2) projections ***perspectives*** :
- selon un axe principal
- générale



III. Projections / parallèle

1) Projection parallèle

Il existe deux types de projections parallèles

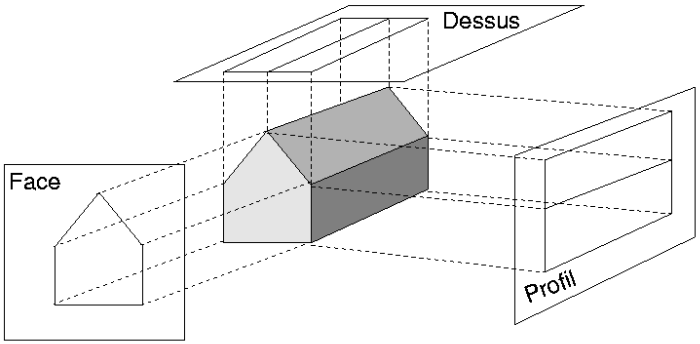
- projection orthographique lorsque la direction de projection est perpendiculaire au plan de projection ;
- projection oblique sinon.

Propriétés géométriques des projections parallèles

- conservent le ***parallélisme*** des droites ;
- conservent ***les rapports des distances*** selon une direction donnée.

III. Projections / parallèle

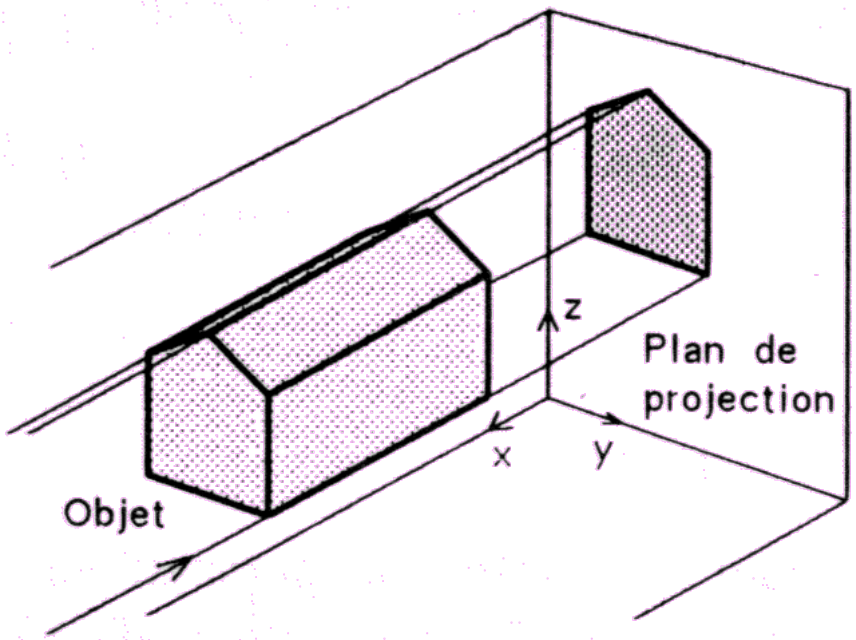
a) orthographique



éliminer Z → vue de dessus
éliminer Y → vue de côté
éliminer X → vue de face

$$M_{\mathrm{orth},z}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

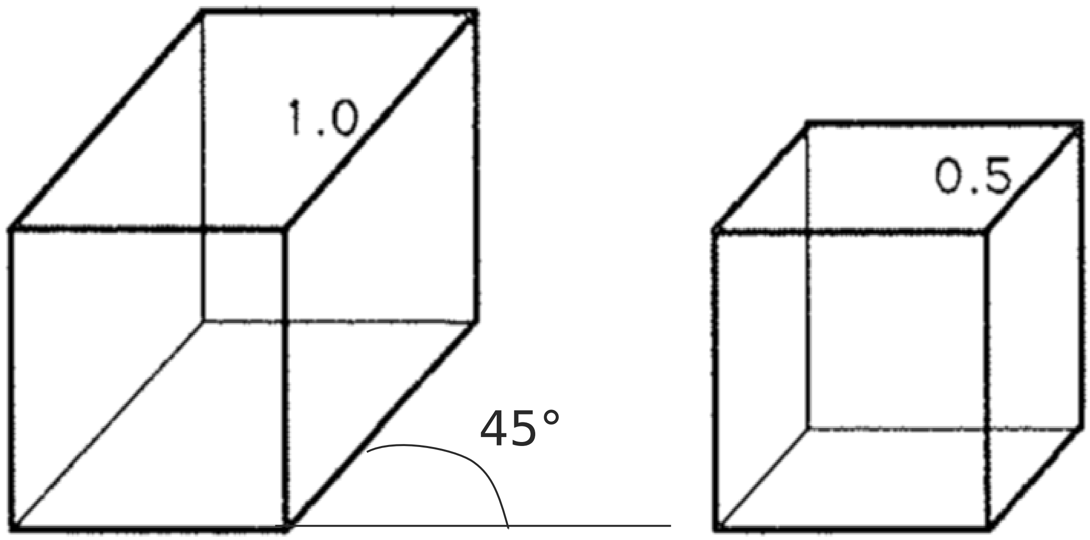
$$M_{\mathrm{orth},x}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$



III. Projections / parallèle

b) oblique

$$R_z\left(\frac{\pi}{4}\right)$$



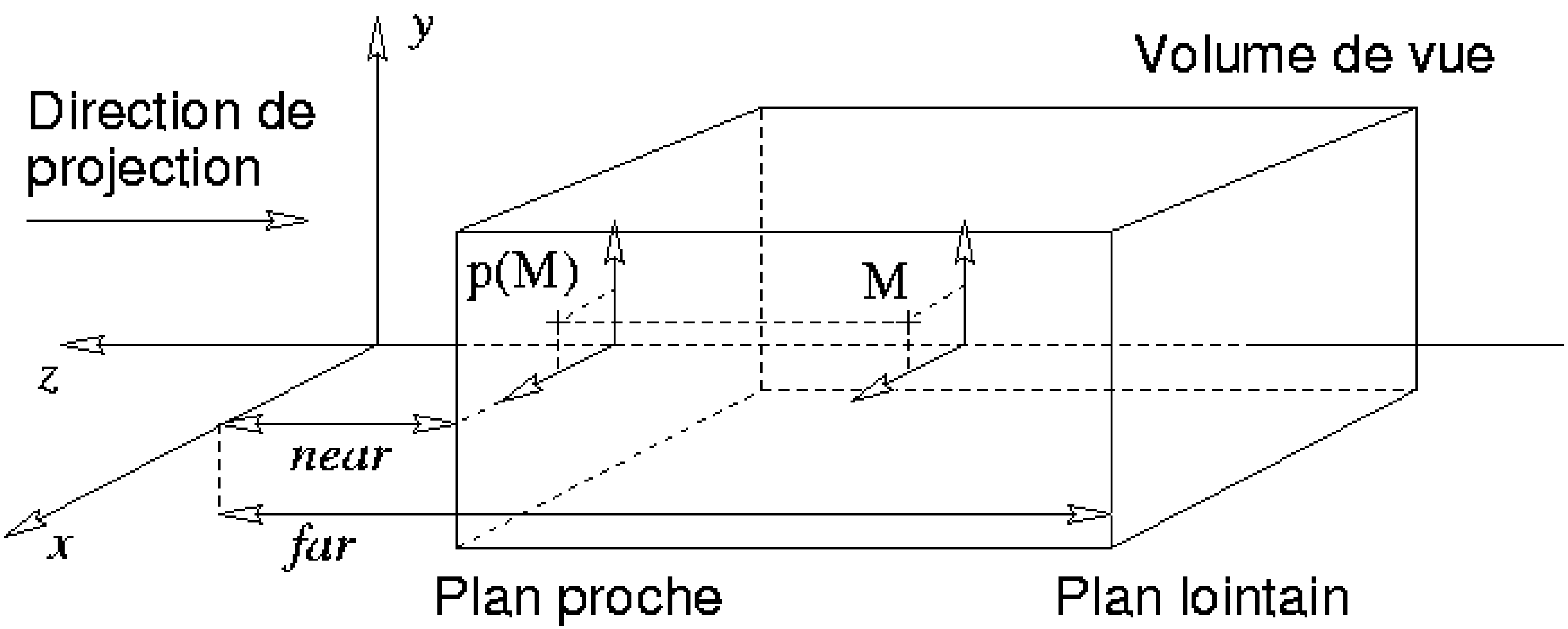
cavalière cabinet

$$M_{\text{axo}} = M_{\text{orth},x} \cdot R_z \cdot R_y \cdot R_x \cdot T$$

III. Projections / parallèle

volume de vue en projection parallèle

Pour se ramener à un volume de vue canonique, on effectue une rotation du repère.



III. Projections / perspective

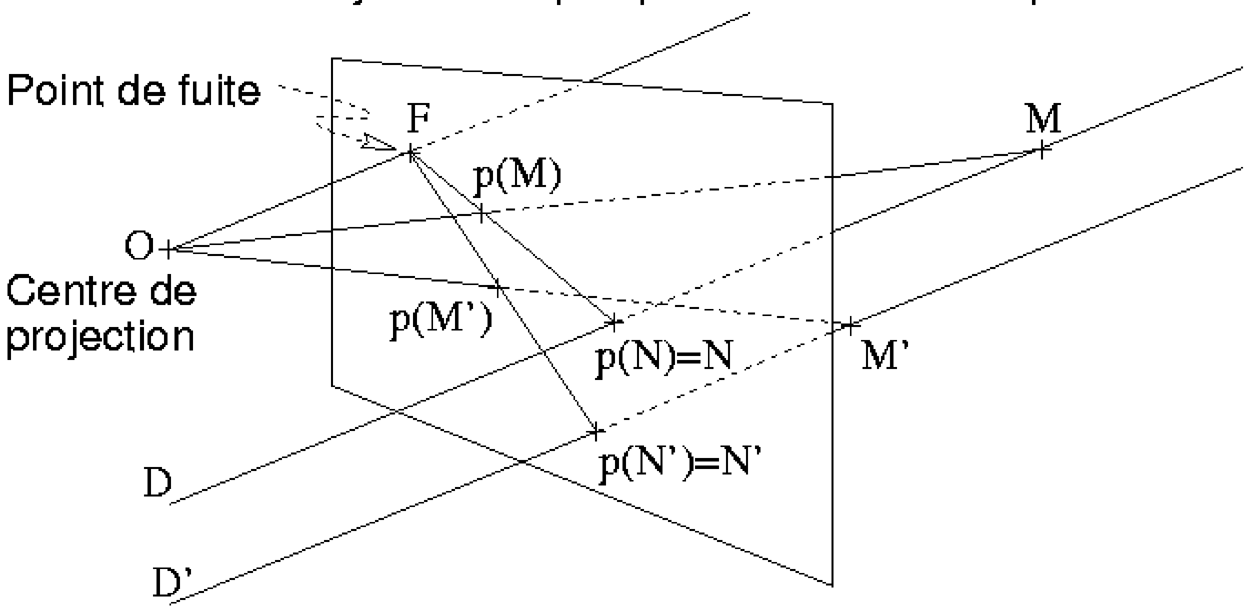
2) projection perspective

Définitions :

- l'image d'un point *M* par une projection en perspective sur le plan *P* de centre *O* est l'***intersection*** de la droite *(OM)* avec le plan *P* ;

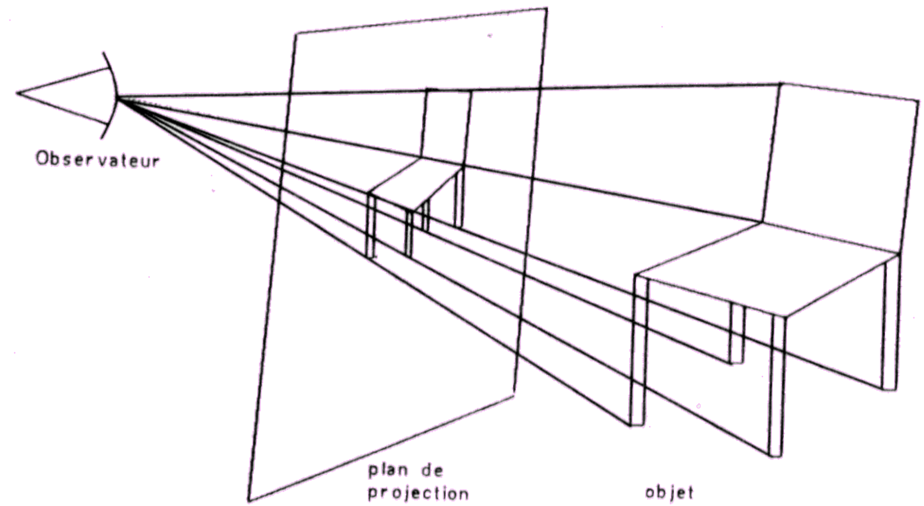
- une projection en perspective dont le centre de projection est à l'***infini*** est une projection parallèle.

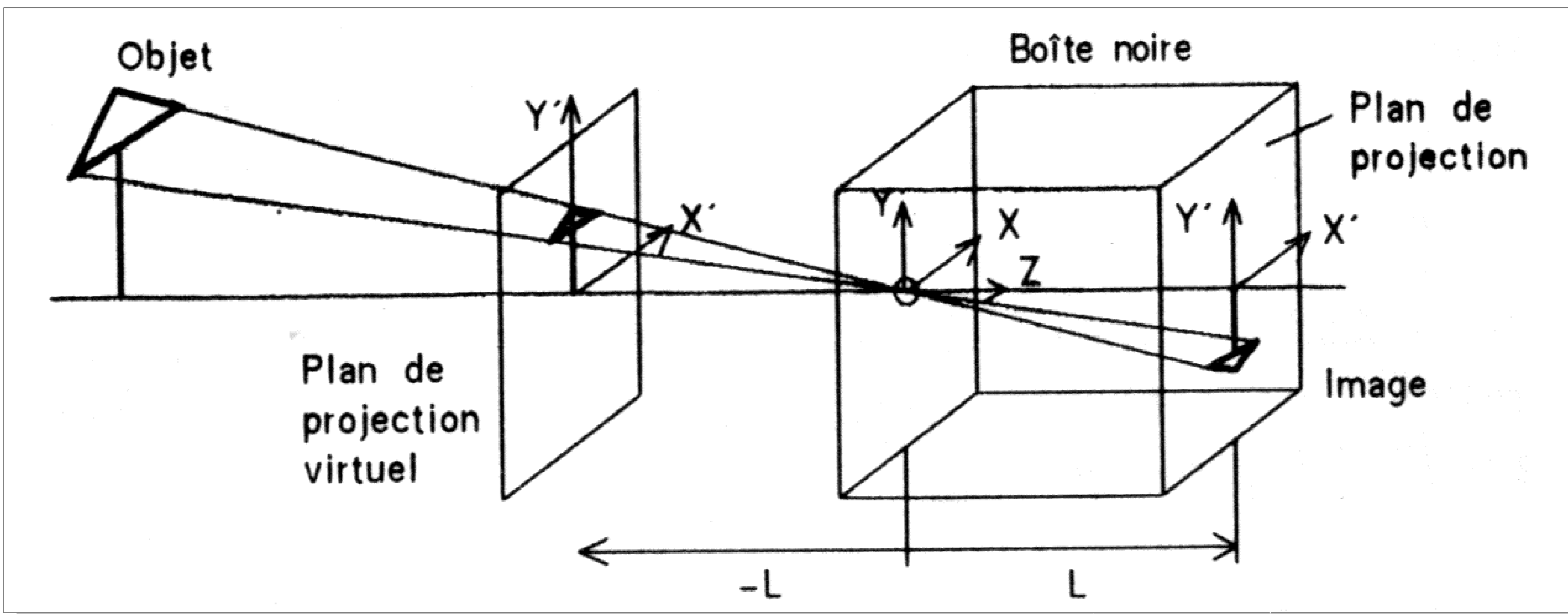
Projection en perspective de 2 droites parallèles



III. Projections / perspective

Analogie avec une caméra



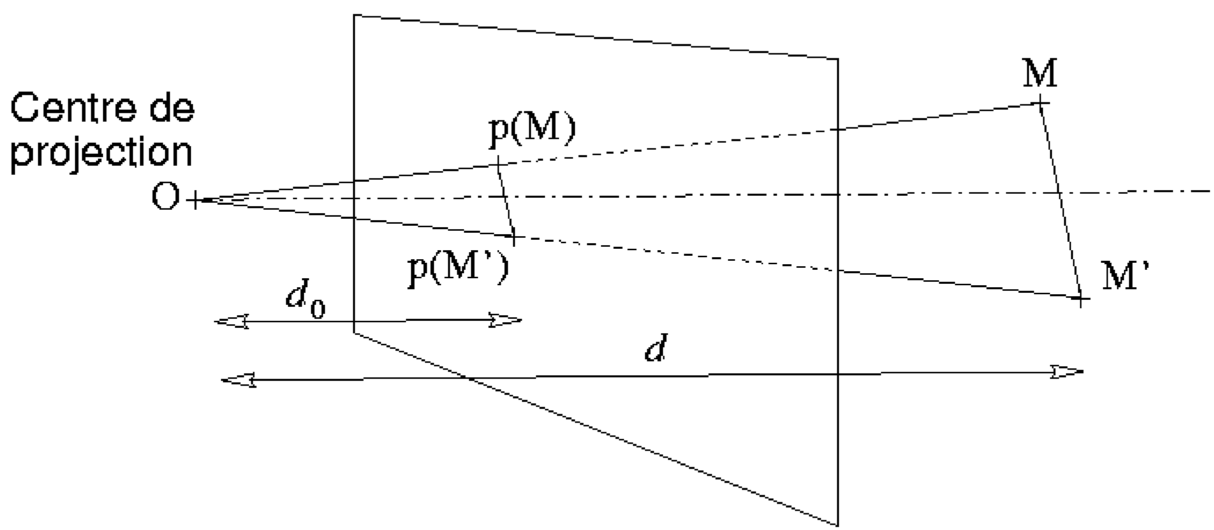


III. Projections / perspective

Propriétés géométriques des projections en perspective

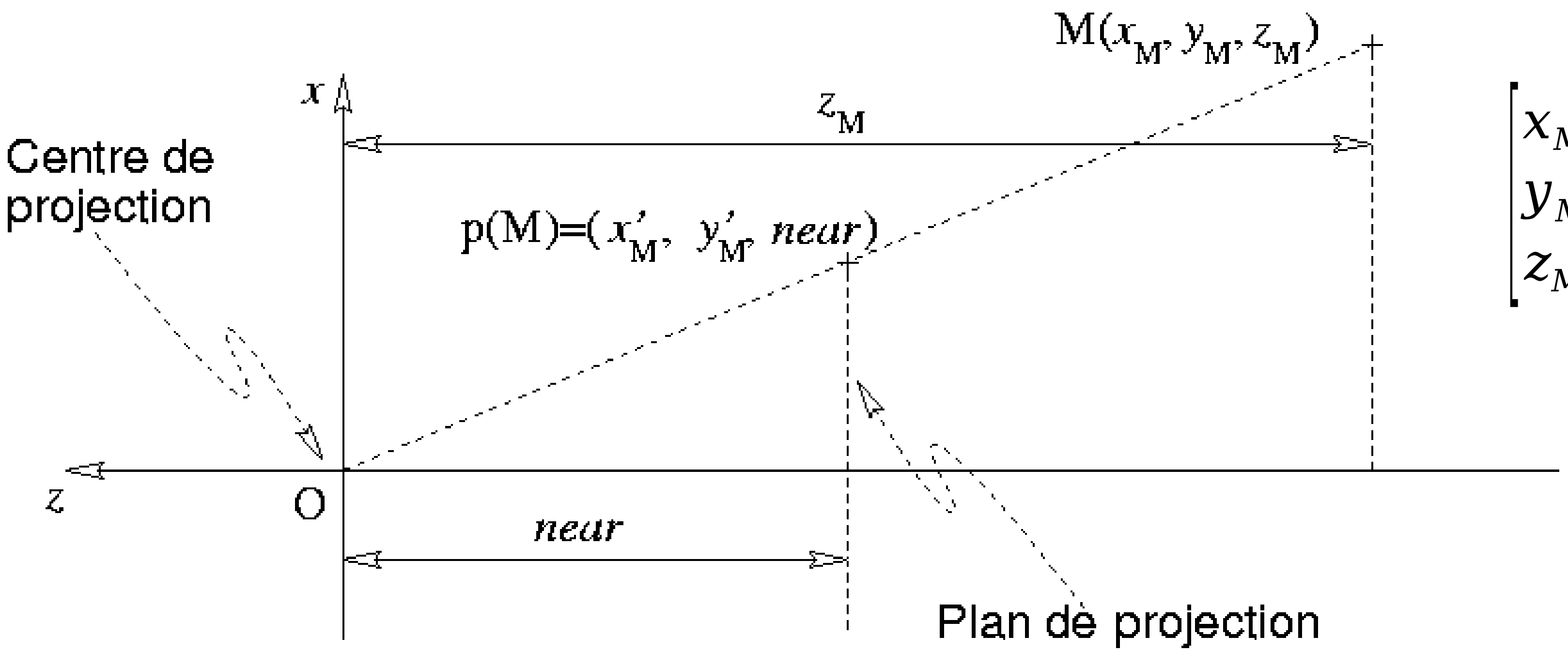
- les projections **ne conservent pas** le parallélisme des droites non parallèles au plan de projection ;
- la taille d'un objet est **inversement proportionnelle à sa distance** au point de projection :

$$\left\|\overrightarrow{Proj(M)\,Proj(M')}\right\| = \left\|\overrightarrow{MM'}\right\| \times \frac{d_0}{d}$$



III. Projections / perspective

Coordonnées du point projeté en fonction de celles du point source, projection du point *M* sur le plan *near* :



$$\begin{bmatrix} x_{M'} \\ y_{M'} \\ z_{M'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{x_M}{(z_m/near)} \\ \dfrac{y_M}{(z_m/near)} \\ near \end{bmatrix}$$

III. Projections / perspective

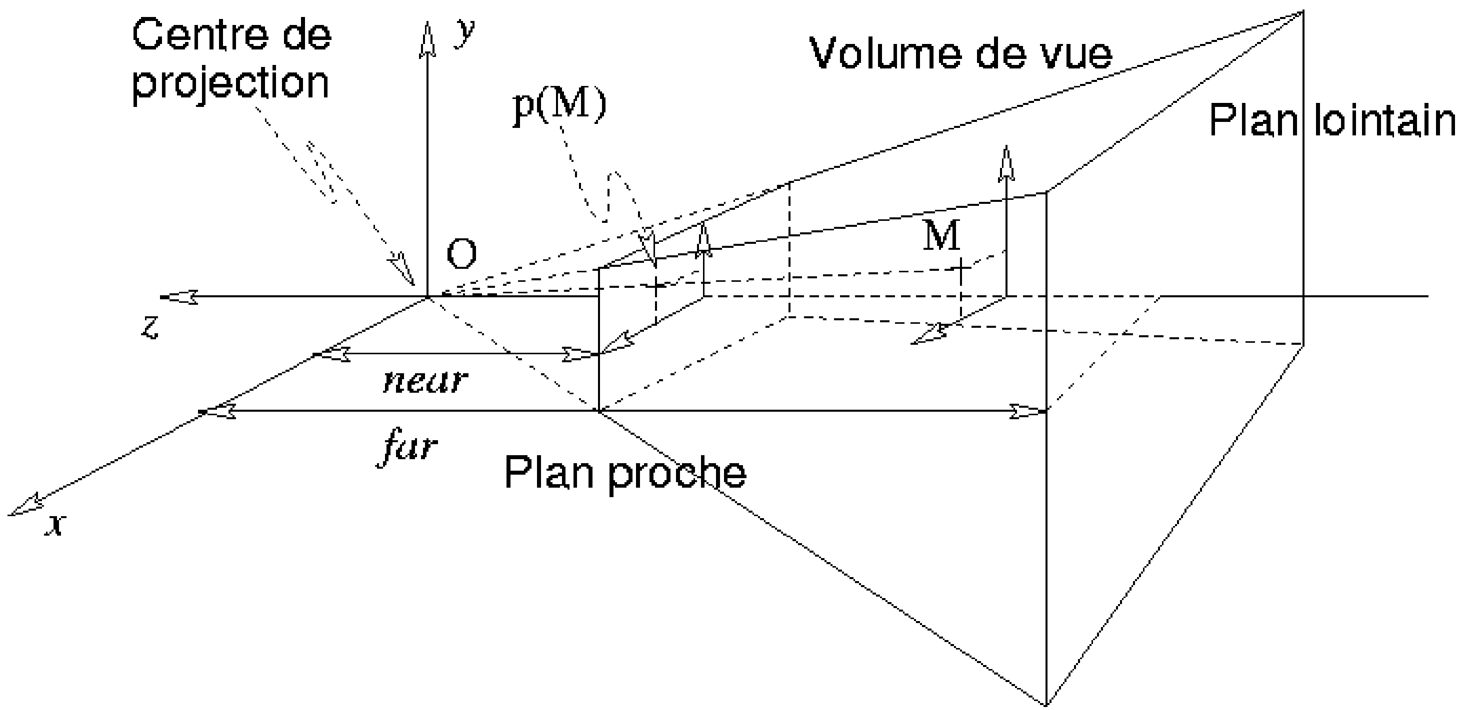
Matrice en coordonnées homogènes de la projection

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix}_{P'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{near} & 0 \end{bmatrix}_T \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}_P$$

III. Projections / perspective

Volume de vue en projection perspective

Pour se ramener à un volume de vue canonique, on effectue une rotation et une translation du repère.

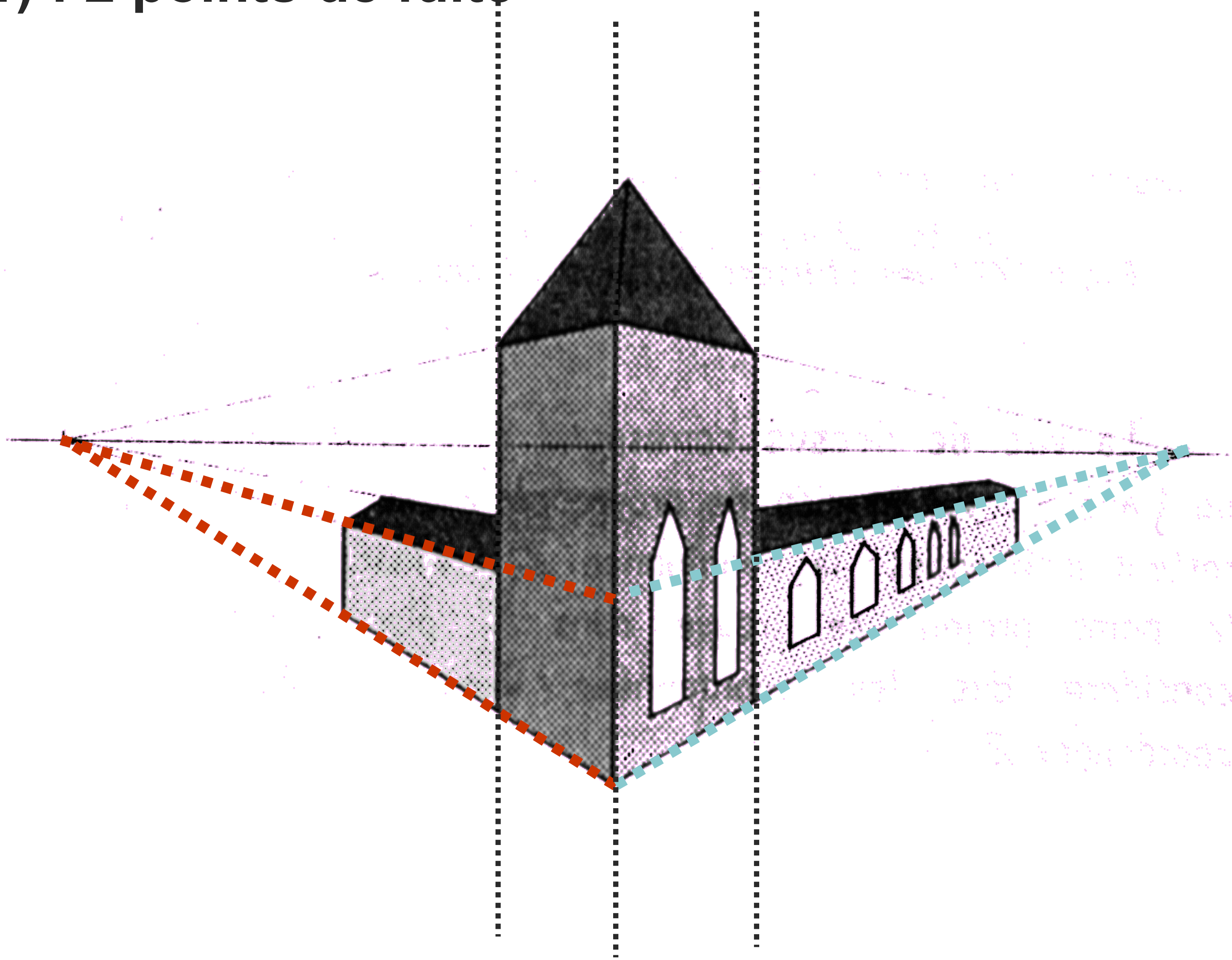


III. Projections / perspective

Points de fuite

- si une droite *D* coupe le plan de projection, il existe un point *F*, appelé ***point de fuite*** appartenant à la projection de toute droite parallèle à *D (cf.* diapo précédente) ;
- on différencie les projections en perspective par le nombre de points de fuite pour les directions des axes du repère (le nombre d'intersections des axes de coordonnées avec le plan) ;
- en général on a deux points de fuite (caméra verticale non parallèle à un des axes) ;
- le troisième point de fuite n'augmente pas significativement le réalisme.

Exemple (1) : 2 points de fuite



III. Projections / perspective

Exemple (2) : 3 points de fuite